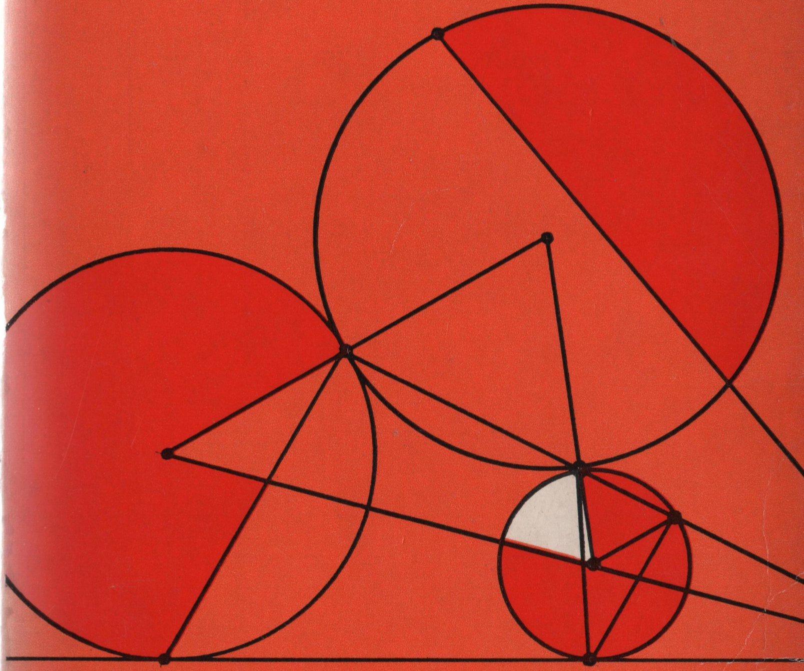
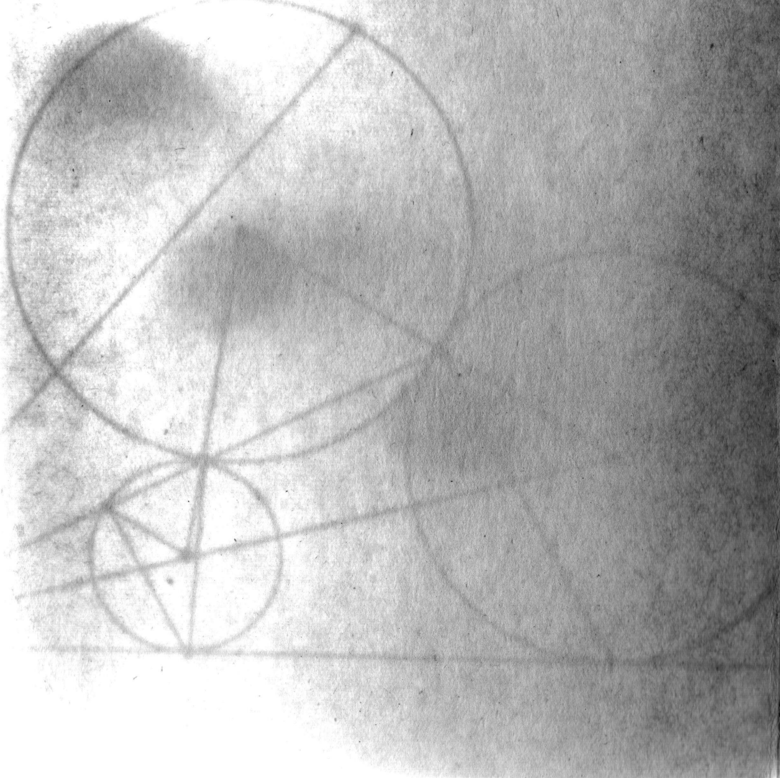
J. H. van den Hoeven

Planimetrie

PRISMA-COMPENDIA



In dit deel van de Compendium-reeks worden allereerst die onderwerpen van de meetkunde behandeld, die op de programma's staan van de vele scholen voor voortgezet onderwijs. Hoewel hierbij een logische volgorde in acht is genomen, is de behandeling zo eenvoudig mogelijk gehouden en is getracht door de groeperingen van stellingen, formules en dergelijke de overzichtelijkheid te bevorderen.
Hierna volgt een uitbreiding van de stof, bestaande uit diverse onderwerpen, zoals pool en poollijn, inversie en het raakprobleem van Apollonius. Deze onderwerpen kunnen van belang zijn voor hen, die bij hun studie niet kunnen volstaan met de stof die bij het middelbaar onderwijs ter sprake komt.
Ieder die zijn kennis van de meetkunde wil opfrissen of uitbreiden, zal door de overzichtelijke indeling zijn weg in het boek weten te vinden.



PRISMA-COMPENDIA

J. H. van den Hoeven

PLANIMETRIE

PRISMA-COMPENDIA

HET POCKETBOEK

VOOR STUDIE EN PRAKTIJK

REDACTIERAAD

Mevr. Dr. H. A. van den Berg-Noë

H. Bouwmeester / Dr. P. Brommer

Drs. R. H. Houwink / Dr. H. P. H. Jansen

L. M. Japin / Dr. J. A. Vreeswijk

Ir. J. van Zijll

UTRECHT

PRISMA-BOEKEN

ANTWERPEN

J. H. VAN DEN HOEVEN

PLANIMETRIE

UTRECHT
PRISMA-BOEKEN
ANTWERPEN

© 1964 by Het Spectrum
Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotocopie, microfilm of op welke andere wijze ook zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.
No part of this book may be reproduced in any form, by print, photoprint, microfilm or any other means without written permission from the publisher.
Prisma-boeken, Prisma-detectives, Prisma-juniores, Prisma-kinderpockets, Biggles-pockets, Aula-, Marka-, Pictura-boeken en Prisma-compendia worden uitgegeven door Uitgeverij Het Spectrum N.V., Utrecht/Antwerpen.

INHOUD

Gebruikte tekens en afkortingen 8

I. DE GRONDSLAG 9

II. RECHTE LIJN EN HOEK 14

III. DE DRIEHOEK 34
A. Algemeen 34
B. Congruentie 47

IV. DE VIERHOEK 57
A. Algemeen 57
B. Het parallellogram 62
C. De ruit 66
D. De rechthoek 68
E. Het trapezium 70
F. Het vierkant 73

V. VERHOUDINGEN EN EVENREDIGHEDEN 79

VI. DE CIRKEL 91
A. Algemeen 91
B. Cirkel en rechte 93
C. Hoeken en bogen 97

VII. TRANSFORMATIES 106
A. Verplaatsingen 106
1. Algemeen 106
2. Rotatie of draaiing 110
3. Translatie of verschuiving 111
4. Spiegeling 114
5. Combinaties van rotaties, translaties en spiegelingen 116
B. Vermenigvuldiging van figuren 119
C. Centrale collineatie 123
1. Centrale collineatie 124
2a. Scheve affiniteit 125
2b. Rechte affiniteit 126
2c. Asspiegeling 126
3a. Homothetie 126

3b. Translatie 127
4a. Centrale projectie 127
4b. Scheve parallelprojectie 128
4c. Orthogonale parallelprojectie 128
D. Inversie 129

VIII. GELIJKVORMIGHEID VAN FIGUREN 130

IX. MEETKUNDIGE PLAATSEN 134

X. DE DRIEHOEK (vervolg) 145
A. Rechthoekige driehoeken 145
B. Willekeurige driehoeken 151
C. Merkwaardige lijnen in de driehoek 161
1. Definities 161
2. Over het concurrent zijn van merkwaardige lijnen 163
3. Over verhoudingen bij merkwaardige lijnen 167
4. Over de formules voor de merkwaardige lijnen 170
5. Over de hoeken bij merkwaardige lijnen 174
6. Rechte van Euler 178

XI. OPPERVLAKTE 180
A. Algemeen 180
B. Bijzondere figuren 181

XII. DE CIRKEL (vervolg) 192
A. Lijnstukken in de cirkel 192
B. Onderlinge ligging van twee cirkels 195
C. Om-, in-, en aangeschreven cirkels van een driehoek 207
D. Koorden- en raaklijnenvierhoek 212
E. Macht en machtlijn 219

XIII. MEETKUNDIGE PLAATSEN (vervolg) 224

XIV. DE VEELHOEK 229
A. Algemeen 229
B. Bijzondere veelhoeken 231
C. Omtrek en oppervlakte van de cirkel 238

XV. INVERSIE 245

XVI. CONSTRUCTIES 252

XVII. POOL EN POOLLIJN 280
A. Anharmonische verhoudingen 280
B. Harmonische dubbelverhoudingen 283
C. Pool en poollijn 285
D. Volledige vierhoek en volledige vierzijde 291

XVIII. CIRKELBUNDELS 297

XIX. HET RAAKPROBLEEM VAN APOLLONIUS 303

BIBLIOGRAFIE 311

OVERZICHT VAN DE STELLINGEN 312

REGISTER 331

$\angle$	hoek
$\triangle$	driehoek
$/\!/$	evenwijdig aan
$\perp$	loodrecht op
$<$	kleiner dan
$>$	groter dan
$\leqslant$	kleiner dan of gelijk aan
$\geqslant$	groter dan of gelijk aan
$\cong$	congruent met
$\sim$	gelijkvormig met
$\rightarrow$	hieruit volgt
st.	stelling
def.	definitie
ax.	axioma
H.E.	hoofdeigenschap van de evenredigheden
parm.	parallellogram
bg	boog
hk	hoek(en)
z.b.	zie boven
geg.	gegeven
fig.	figuur
opp.	oppervlak

I. DE GRONDSLAG

De eerste kennismaking met de meetkunde heeft voor vrijwel ieder van ons, zij het onbewust, op zeer jeugdige leeftijd plaats gehad. Op onze derde of vierde verjaardag kregen we bijvoorbeeld een mozaïekdoosje en het duurde dan doorgaans niet lang, of we zagen kans, om daar alle mogelijke figuren mee te leggen. Maar na afloop van die bezigheid kregen we al gauw de opdracht, om nu ook de figuurtjes weer in de doos terug te leggen. Sommige kinderen hebben daar de grootste moeite mee, terwijl anderen daar juist plezier in hebben. Ze proberen de doos weer gevuld te krijgen op een andere manier dan het voorbeeld aangeeft. Zonder stellingen of axioma's hebben ze toch wel ontdekt, dat twee driehoekjes soms een vierkant kunnen vormen, maar ook dat je er een grotere driehoek van kunt maken. Ze bedrijven dan een soort van intuïtieve meetkunde en later op de kleuterschool is het de gewoonste zaak van de wereld, om met driehoekjes, vierkantjes, rechthoekjes en rondjes te werken en daar de prachtigste figuren van samen te stellen.
Maar na deze kleutertijd komt de lagere school en die eist de aandacht van het kind op voor zoveel andere belangrijke dingen, dat de driehoekjes en de vierkantjes weinig kans meer krijgen een rol te spelen in het kinderleven. Het duurt dan enige jaren, voor deze figuurtjes weer tevoorschijn komen en dat gebeurt dan in een vorm, die veel kinderen niet erg op prijs stellen. Er is plotseling sprake van omtrek en oppervlakte van weilanden of speelplaatsen en maar al te vaak blijft dat onbegrepen, getuige het gemak, waarmee veel kinderen de omtrek en de oppervlakte met elkaar verwisselen.
Na de lagere school komt de middelbare school of een andere school van voortgezet onderwijs en daar moet men dan trachten enige orde te brengen in de kennis, die het kind soms al spelend verworven heeft. Dat daarbij op het terrein van de wiskunde wel eens 'ongelukken' gebeuren, ligt voor de hand, want we gaan dan een leerling van twaalf jaar confronteren met begrippen, die vaak nog boven zijn bevattingsvermogen gaan. Het vermogen om logisch te denken is dan nog in een vroeg stadium van ontwikkeling en deze ontwikkeling zal zich nog een lange tijd moeten voortzetten.
Het is dus eigenlijk geen wonder, dat veel van hetgeen we op

die leeftijd van de meetkunde hebben moeten leren aan ons is voorbij gegaan of is gedegradeerd tot een verzameling van regels en kunstjes, die we misschien onder bepaalde omstandigheden konden toepassen, zonder echter te weten, waar het eigenlijk om ging.
Als we dit alles overdenken, komen we haast vanzelf tot de gedachte, dat het toch wel de moeite waard zou zijn als we het nog eens over konden doen, maar dan met de vermogens, de belangstelling en het inzicht, die we op dit moment bezitten. Onze instelling zou in dat geval totaal afwijken van die van het merendeel van de jeugdige leerlingen die het wiskunde-onderwijs volgen. De vaak gehoorde vraag waarvoor je de wiskunde nu eigenlijk nodig hebt, komt bijna altijd uit de mond van leerlingen, die op gespannen voet staan met dit vak en die het maar liefst zo spoedig mogelijk van het lesrooster geschrapt zien. Gelukkig vindt de wiskundeleraar in iedere klas ook leerlingen, die niet alles als zoete koek slikken en er blijk van geven wel degelijk zelf hun hersenen te gebruiken en er dan ook niet tegen op zien, in debat te treden over een of andere kwestie. Er kan zich zo een gesprek ontwikkelen, dat ook voor andere leerlingen verhelderend kan werken.
Tijdens een meetkundeles was eens lang en breed gepraat over de definitie van een meetkundige plaats. Onder het vele, dat daarbij naar voren kwam, was vooral duidelijk gemaakt, dat een meetkundige plaats *alle* punten omvat, die aan een bepaalde voorwaarde voldoen. In het boek stond vervolgens een stelling, die als volgt begon: De meetkundige plaats van *alle* punten, die ... Een van de leerlingen plaatste toen de opmerking, dat het woordje 'alle' in de stelling toch overbodig was, want dat woordje 'alle' zat toch al opgesloten in het begrip 'meetkundige plaats' volgens de zojuist behandelde definitie. De leraar, die er zelf misschien overheen gelezen had, kon niets anders doen dan de opmerking van deze leerling beamen. Dat hij deze leerling aan de klas ten voorbeeld stelde, laat zich begrijpen. En als we nu de wiskunde, althans een deel ervan, opnieuw willen bestuderen, dan kunnen we de instelling van deze jongen voor ogen houden en trachten na te volgen. Het zal de resultaten van onze studie in alle opzichten ten goede komen.

We zullen nu eerst gaan zien, hoe de meetkunde opgebouwd is. We gaan uit van een aantal *grondbegrippen*, zoals *punt*, *rechte*

lijn en *plat vlak* en enige *grondrelaties*, die daarbij kunnen optreden, zoals de relatie '*tussen*' en het begrip '*verplaatsing*'. We kunnen de grondbegrippen niet definiëren. Ze krijgen pas hun juiste betekenis door het invoeren van een aantal *axioma's*. In deze axioma's wordt dan vastgelegd, welke eigenschappen we aan de grondbegrippen toekennen. Naast de grondbegrippen en axioma's maken we gebruik van *definities*. Als twee mensen over een meetkundig begrip spreken, mag het niet voorkomen dat ze langs elkaar heen praten omdat ze ieder van dat begrip een andere interpretatie geven. Een definitie van zo'n begrip tracht nu een zodanige omschrijving ervan te geven, dat verwarring met andere begrippen uitgesloten is.

We zijn min of meer vrij in het kiezen van grondbegrippen en axioma's. De bedoeling is, dat we er *stellingen* uit gaan afleiden louter door logische redenering, dus zonder er ruimtelijke voorstellingen aan te verbinden. Om praktische redenen zullen we in dit boek steeds weer ons voorstellingsvermogen te hulp roepen, aangezien dit het bewijzen van de stellingen heel wat eenvoudiger kan maken. We moeten daarbij wel steeds bedenken, dat het mogelijk is de stellingen te bewijzen zonder van die voorstellingen gebruik te maken, maar een dergelijke bewijstrant past niet in het kader van dit boek.

De axioma's, waarvan we gebruik zullen gaan maken, hebben het voordeel dat ze overeenstemmen met onze natuurlijke ruimtelijke voorstellingen. We zullen daarvan steeds weer gebruik maken. Vroeger werd het zelfs als eis gesteld, dat een axioma niet in strijd mocht zijn met de werkelijkheid om ons heen. In de vorige eeuw heeft men ingezien, dat deze eis niet gehandhaafd behoefde te worden. Daardoor werd het mogelijk, om naast de zogenaamde Euclidische meetkunde nog andere soorten van meetkunden op te bouwen, door uit te gaan van andere axioma's. Deze meetkunden worden dan *niet-Euclidische* meetkunden genoemd. Ze wijken in hun beweringen vaak geheel af van onze ruimtelijke voorstellingen.

De vrijheid die we hebben bij het kiezen van axioma's, is echter niet onbeperkt. Ieder axiomastelsel moet aan zekere voorwaarden voldoen. De axioma's van een stelsel mogen *niet strijdig* met elkaar zijn, omdat anders de mogelijkheid zou bestaan er stellingen uit af te leiden, die met elkaar in tegenspraak zijn. Verder moet het stelsel *volledig* zijn, zodat we alle stellingen uit de meetkunde ermee kunnen bewijzen. De axioma's moeten *onderling onafhankelijk* zijn: we trachten het stelsel zó

samen te stellen, dat er niet een axioma bij is, dat uit de andere axioma's is af te leiden. Tenslotte moet een axioma bij voorkeur *enkelvoudig* zijn, zodat in ieder axioma dus slechts één uitspraak wordt gedaan.

Bij de in dit boek te bewijzen stellingen zullen we gebruik maken van het hier volgende stelsel van axioma's, zoals dat ontwikkeld is door professor Van der Waerden. Hij verdeelt de axioma's in drie groepen, namelijk de *verbindingsaxioma's*, de *ordeningsaxioma's* en de *verplaatsingsaxioma's*. In de verbindingsaxioma's worden de eigenschappen, die we aan punten, lijnen en vlakken toekennen, opgesomd. In de ordeningsaxioma's wordt de 'tussen'relatie nader omschreven en in de verplaatsingsaxioma's wordt het begrip 'verplaatsing' vastgelegd.

Opmerking: Het is eigenlijk niet juist, dat we hier al een overzicht van de te gebruiken axioma's hebben gegeven. Een axioma krijgt pas betekenis voor ons, als de erin genoemde begrippen zoals rechte, evenwijdig, congruent, enz. gedefinieerd zijn. Ze zijn hier dan ook alleen bij elkaar gezet om de overzichtelijkheid te bevorderen.

Verbindingsaxioma's voor het platte vlak:

1. Door twee verschillende punten gaat één en slechts één rechte.
2. Elke rechte bevat minstens twee verschillende punten.
3. Er zijn drie verschillende niet op een rechte liggende punten.
4. Twee verschillende rechten, die met een derde rechte evenwijdig zijn, zijn ook evenwijdig met elkaar.

Ordeningsaxioma's voor het platte vlak:

5. Als het punt B tussen de punten A en C ligt, zijn A, B en C drie verschillende punten van een rechte.
6. Van drie verschillende punten van een rechte ligt één en slechts één tussen de beide andere.
7. Als A en B verschillende punten zijn, is er minstens één punt C zó, dat B tussen A en C ligt.
8. Zijn A, B en C punten, die niet tot de rechte l behoren en ligt tussen A en B een punt van l, maar tussen B en C niet, dan ligt tussen A en C een punt van l.
9. Worden de punten van een halve rechte AD in twee klassen verdeeld, die elk minstens één punt bevatten, zó, dat elk punt van de eerste klasse tussen A en elk punt van de tweede klasse ligt, dan is er een punt G zó, dat alle punten tussen A en G tot

de eerste klasse en alle punten van het verlengde van AG tot de tweede klasse behoren.

Verplaatsingsaxioma's voor het platte vlak:

10. Bij een verplaatsing gaat elk punt P in één en slechts één punt Q over.

11. Gaan de punten A, B en C, waarvan B tussen A en C ligt, bij verplaatsing in A′, B′ en C′ over, dan ligt B′ tussen A′ en C′.

12. Ligt het punt B tussen de punten A en C, dan is het lijnstuk AC niet congruent met het lijnstuk AB.

13. Ligt D binnen ∠BAC, dan is ∠BAC niet congruent met ∠BAD.

14. Bij elke verplaatsing V bestaat een verplaatsing V^{-1} (de inverse van V) zó, dat $V^{-1}(VP) = P$ is voor elk punt P.
(Met VP wordt bedoeld het punt, waarin P bij de verplaatsing V overgaat).

15. Bij elke twee verplaatsingen U en V bestaat een verplaatsing W (het produkt VU van U en V) zó, dat $WP = V(UP)$ is voor elk punt P.

16. Liggen de punten A, B en C niet op een rechte en geldt hetzelfde voor de punten A′, B′ en C′, dan is er een verplaatsing, waarbij A in A′, B in een punt van de halve rechte A′B′ en C in een punt van het halve vlak (A′B′, C′) overgaat.

Bij aandachtig lezen van bovenstaand axiomastelsel blijkt, dat niet geheel voldaan is aan de eisen, die wel aan een axiomastelsel gesteld worden. Er zijn namelijk axioma's bij, die twee uitspraken inhouden. In axioma 1 is gesteld, dat door twee verschillende punten steeds een rechte lijn gaat en vervolgens, dat door twee verschillende punten niet meer dan één rechte lijn gaat. Aan de eis van enkelvoudigheid voldoet dit axioma dus niet. In het volledige axiomastelsel van Van der Waerden, dus de axioma's voor de ruimte, is een verbindingsaxioma, dat als volgt luidt: Als twee vlakken één punt gemeen hebben, hebben ze nog minstens één hiervan verschillend punt gemeen. Dit axioma nu is te bewijzen uit de andere verbindingsaxioma's met behulp van de ordeningsaxioma's. Zo beschouwd is het dus afhankelijk van de andere axioma's. Het is echter toch toegevoegd, om zodoende een stelsel van verbindingsaxioma's te krijgen, dat onafhankelijk is van de ordeningsaxioma's. Uit deze paar voorbeelden blijkt wel, dat de eerder genoemde eisen, waaraan een axiomastelsel zal moeten voldoen, niet altijd als dwingende eisen beschouwd moeten worden.

We geven om te beginnen een paar voorbeelden van stellingen, die uit de axioma's zijn af te leiden en de daaruit voortvloeiende definities.

Stelling: **Tussen twee verschillende punten A en B van een rechte m liggen oneindig veel punten.**

Definitie: De verzameling van punten, die tussen A en B liggen, vormen met inbegrip van A en B het lijnstuk AB.

Dat al die punten op een rechte m door A en B liggen, volgt uit axioma 5, dus lijnstuk AB is een deel van de rechte m door A en B. Als een punt B tussen twee verschillende punten A en C op de rechte m ligt, kunnen we dit ook anders zeggen:

1. A en C liggen aan weerskanten van B op m.
2. A en B liggen op m aan dezelfde kant van C.
3. B en C liggen op m aan dezelfde kant van A.

Stelling: **Als A en B twee verschillende punten van de rechte m zijn, liggen er oneindig veel punten met B aan dezelfde kant van A.**

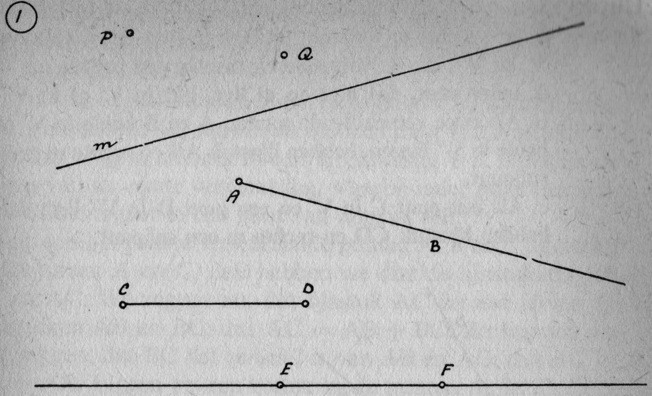
Definitie: De verzameling van punten, die met B aan dezelfde kant van A liggen op een rechte m door A en B, heet de halve rechte AB.

Definitie: De verzameling van punten, die op de rechte m door A en B liggen, zó, dat B tussen A en elk van deze punten ligt, heet het verlengde van AB.

Liggen deze punten zó, dat A tussen B en elk van deze punten ligt, dan vormen ze *het verlengde van BA*. Een lijnstuk heeft dus twee verlengden. Beide verlengden zijn zelf halve rechten. Een halve rechte heeft dus slechts één verlengde.

Uit het bovenstaande blijkt wel, dat een rechte m, die door een punt A gaat, zich aan weerskanten van A oneindig ver uitstrekt. Zou er namelijk een punt B zijn op m, dat een eindpunt was van m, dan zou dat betekenen, dat er geen punt C zou zijn, zó, dat B tussen A en C ligt en dat is in strijd met axioma 7, dat uitdrukkelijk het bestaan van zo'n punt C vermeldt. B kan dus geen eindpunt zijn en hiermee is dus aangetoond, dat de rechte m zich oneindig ver uitstrekt en wel naar weerskanten van A. Voor de halve rechte AB geldt dat hij zich naar één kant oneindig ver uitstrekt. Bij een lijnstuk AB is dit niet het geval en vormen A en B de eindpunten.

In figuur 1 zien we, hoe we bij het maken van een figuur een



punt aanduiden met een hoofdletter om het te onderscheiden van andere punten. Een rechte wordt doorgaans aangegeven met een kleine letter, een halve rechte met een hoofdletter bij het beginpunt en een hoofdletter bij een willekeurig punt ervan, terwijl een lijnstuk van twee hoofdletters bij begin- en eindpunt voorzien wordt. We spreken dus van de punten P en Q, de rechte m, de halve rechte AB en het lijnstuk CD. In de figuur is verder nog getekend het verlengde van EF en het verlengde van FE.

Stelling: **Twee verschillende rechten m en n hebben één punt of geen punt gemeen.**

Dit is als volgt in te zien: We nemen aan, dat m en n twee of meer verschillende punten gemeen hebben. Twee van die gemeenschappelijke punten noemen we A en B. Dan gaat m dus door A en B en n gaat ook door A en B. Volgens axioma 1 gaat door de twee verschillende punten A en B slechts één rechte. Dat houdt dus in, dat m en n dezelfde rechte voorstellen, hetgeen in strijd is met ons uitgangspunt, dat m en n verschillende rechten zijn. Door aan te nemen, dat m en n twee of meer verschillende punten gemeen hebben, komen we tot een strijdigheid. Hieruit volgt, dat m en n één of geen punt gemeen hebben.

Definitie: Als twee verschillende rechten m en n één gemeenschappelijk punt hebben, heten ze snijdende rechten. Het gemeenschappelijke punt heet het *snijpunt* van die twee rechten.

Definitie: Als twee verschillende rechten m en n geen gemeenschappelijk punt hebben, heten ze evenwijdige rechten.

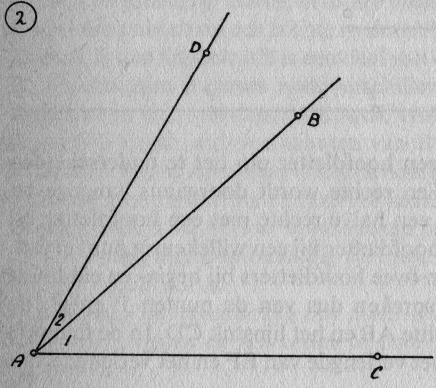
Uit de axioma's 3 en 7 is de volgende stelling af te leiden:

Stelling: **Iedere rechte m verdeelt het vlak in twee halve vlakken V′ en V″, die de volgende eigenschappen hebben:**

a. **Ieder punt, dat niet op m ligt, ligt in V′ of in V″.**

b. **Als twee verschillende punten A en B beide in V′ of beide in V″ liggen, hebben lijnstuk AB en rechte m geen snijpunt.**

c. **Als een punt C in V′ en een punt D in V″ ligt, dan hebben lijnstuk CD en rechte m een snijpunt.**



In het onder b genoemde geval zeggen we, dat A en B aan *dezelfde kant* van m liggen en in het onder c genoemde geval liggen C en D aan *verschillende* kanten van m (ook wel: *aan weerskanten* van m).

Als we nu de verbindings- en ordeningsaxioma's nog eens doorlezen, blijkt, dat de daarin voorkomende begrippen en relaties betekenis hebben gekregen door het uitspreken van de axioma's zelf, of door de definities die gegeven zijn. Verder zijn nog enige toevoegingen uit het gewone spraakgebruik gegeven. Het bewijzen van de reeds uitgesproken stellingen is op een enkele uitzondering na achterwege gelaten, omdat dit ons te ver zou voeren, in het bijzonder bij de laatstgenoemde stelling. We zullen trouwens, zoals reeds in hoofdstuk I aangekondigd is, gebruik gaan maken van ons voorstellingsvermogen bij het bewijzen van de stellingen. Bovendien zullen we door het tekenen van een figuur ons voorstellingsvermogen te hulp komen.

We zullen nu eerst zien, hoe we verschillende lijnstukken kunnen vergelijken.

Definitie: We noemen twee lijnstukken AB en CD gelijk, als er een verplaatsing is, waarbij lijnstuk AB overgaat in lijnstuk CD (Zie hoofdstuk VII.)
Dat wil dus zeggen, dat er een verplaatsing V is, waarbij ieder punt van lijnstuk AB samenvalt met een punt van lijnstuk CD. Er is dan volgens axioma 14 een verplaatsing V^{-1}, namelijk de *inverse* van de eerste verplaatsing, waarbij ieder punt van lijnstuk CD overgaat in een punt van lijnstuk AB.
Als op een lijn m drie verschillende punten A, B en C liggen en B ligt tussen A en C, dan hebben we dus de lijnstukken AB BC en AC. We zeggen nu, dat lijnstuk AC de *som* is van de lijnstukken AB en BC, dus AC = AB + BC. Zo kunnen we ook zeggen, dat BC het *verschil* is van AB en AC, dus BC = AC − AB. Liggen op een rechte m de punten A, B, C, D ... zó, dat AB = BC = CD = ..., dan is AC = 2AB, AD = 3AB, enz. Het is dus mogelijk een lijnstuk met een bepaald getal n te vermenigvuldigen. Later zullen we zien hoe deze bewerking constructief uit te voeren is, terwijl we dan bovendien zullen nagaan hoe we een lijnstuk in enige gelijke delen kunnen verdelen.
Aan alle lijnstukken is een bepaald positief getal toe te voegen, dat aan de volgende voorwaarden voldoet:
1. *Bij gelijke lijnstukken behoren steeds gelijke getallen.*
2. *Bij elk positief getal behoort een lijnstuk.*
3. *Een lijnstuk is alleen dan de som van twee andere lijnstukken, als deze zelfde betrekking geldt voor de bij die lijnstukken behorende getallen.*

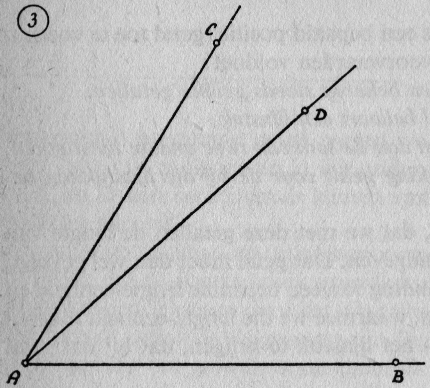
Het zal duidelijk zijn, dat we met deze getallen de lengte van een lijnstuk kunnen aangeven. Dat getal moet dan wel gevolgd worden door de aanduiding van een bepaalde lengte-eenheid en het getal geeft dan aan, waarmee we die lengte-eenheid moeten vermenigvuldigen, om het lijnstuk te krijgen, dat bij dat getal behoort.

Definitie: Een hoek is de figuur gevormd door twee halve rechten, die hetzelfde eindpunt hebben.
De halve rechten noemen we de *benen* van de hoek. Het gemeenschappelijk eindpunt heet het *hoekpunt* van de hoek. Het teken voor hoek is $\angle$. Het wordt alleen gebruikt, als achter het woord hoek onmiddellijk de naam van die hoek volgt. Een hoek duiden we aan door middel van de letter die bij het hoekpunt staat. Als er sprake is van verschillende hoeken is deze aanduiding soms niet voldoende en kunnen we gebruik maken van

een index, die we in de figuur binnen de hoek bij het hoekpunt plaatsen, dus $\angle A_1$, $\angle A_2$, $\angle A_{1,2}$ (hoek A één twee) (fig. 2). Ook zetten we bij een willekeurig punt van de benen wel een hoofdletter en noemen voor iedere hoek dan drie letters. De middelste is de letter, die bij het hoekpunt staat, terwijl de eerste en de derde letter ieder bij een been van de hoek staan, dus $\angle$BAC of $\angle$CAB is $\angle A_1$ en $\angle$CAD of $\angle$DAC is $\angle A_{1,2}$.
Iedere hoek heeft een *binnengebied* en een *buitengebied*. Binnen- en buitengebied worden van elkaar gescheiden door de benen van de hoek. Het lijnstuk, dat twee verschillende punten van het binnengebied verbindt, snijdt de benen van de hoek niet. Het lijnstuk, dat een punt van het binnengebied verbindt met een punt van het buitengebied, snijdt één van de benen van de hoek.
We zullen nu verschillende hoeken gaan vergelijken.

Definitie: Twee hoeken heten gelijk als ze congruent zijn, (zie hoofdstuk VII) d.w.z. als er een verplaatsing is, waarbij het hoekpunt en de benen van de ene hoek overgaan in het hoek-

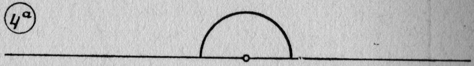
③



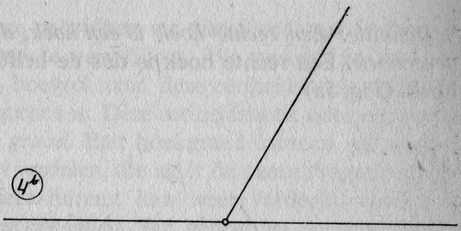
punt en de benen van de andere hoek. Ligt een punt D in het binnengebied van $\angle$BAC of korter gezegd: ligt punt D binnen $\angle$BAC, dan is volgens axioma 13 $\angle$DAC niet congruent met $\angle$BAC (fig. 3). We zeggen nu: $\angle$BAC is de *som* van $\angle$DAC en $\angle$BAD. En ook: $\angle$BAD is het *verschil* van $\angle$BAC en $\angle$DAC. $\angle$DAC is kleiner dan $\angle$BAC ($\angle DAC < \angle BAC$) en $\angle$BAC is groter dan $\angle$DAC ($\angle BAC > \angle DAC$).
Evenals bij de lijnstukken het geval is, kunnen we met behulp

van maatgetallen de grootte van een hoek aangeven. Voor deze getallen geldt weer het volgende:

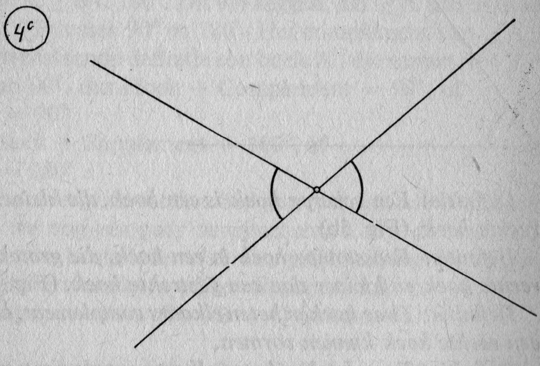
1. *Bij gelijke hoeken behoren gelijke getallen.*
2. *Bij elk positief getal, dat kleiner is dan één van de maatgetallen behoort een bepaalde hoek.*
3. *Een hoek is alleen dàn de som van twee andere hoeken, als deze zelfde betrekking ook geldt voor de bij die hoeken behorende getallen.*



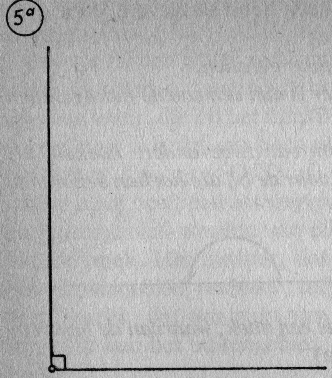
Definitie: Een gestrekte hoek is een hoek, waarvan de benen in elkaars verlengde liggen. (Fig. 4a)



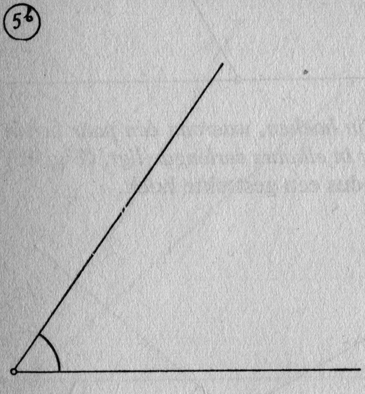
Definitie: Nevenhoeken zijn hoeken, waarvan één paar benen samenvalt en het andere paar in elkaars verlengde ligt. (Fig. 4b) Twee nevenhoeken vormen dus een gestrekte hoek.



Definitie: Overstaande hoeken zijn hoeken, waarvan de benen in elkaars verlengde liggen. (Fig. 4c)



Definitie: Een rechte hoek is een hoek, die gelijk is aan zijn nevenhoek. Een rechte hoek is dus de helft van een gestrekte hoek. (Fig. 5a)



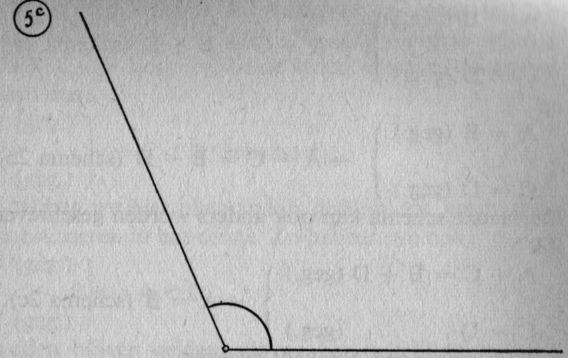
Definitie: Een scherpe hoek is een hoek, die kleiner is dan een rechte hoek. (Fig. 5b)

Definitie: Een stompe hoek is een hoek, die groter is dan een rechte hoek en kleiner dan een gestrekte hoek. (Fig. 5c)

Definitie: Twee hoeken heten elkaars complement, als ze samen een rechte hoek kunnen vormen.

Definitie: Twee hoeken heten elkaars supplement, als ze samen een gestrekte hoek kunnen vormen.

De hoek, die we krijgen, als we een rechte hoek in negentig ge-



lijke delen verdelen, gebruiken we dikwijls als eenheid om er andere hoeken mee te vergelijken. We geven dan met een positief getal aan, hoeveel maal deze eenheidshoek op de betreffende hoek begrepen is. Deze eenheidshoek noemen we één *hoekgraad* of één *graad*. Een hoekgraad kunnen we weer in zestig gelijke delen verdelen, die ieder de naam dragen van één (hoek)*minuut*. Iedere minuut kan weer verdeeld worden in zestig gelijke (hoek)*seconden*. We gebruiken de schrijfwijze: $1^\circ = 60'$ (één graad is zestig minuten) en: $1' = 60''$ (één minuut is zestig seconden). Een rechte hoek is dus negentig graden en een gestrekte hoek is honderdtachtig graden. Voor een scherpe hoek A geldt: $0^\circ < \angle A < 90^\circ$. Voor een stompe hoek B geldt: $90^\circ < \angle B < 180^\circ$. Dit wil zeggen, dat $\angle A$ tussen 0° en 90° ligt en $\angle B$ tussen 90° en 180°. Het complement van $\angle A$ is volgens bovenstaande definitie een hoek A′, die samen met $\angle A$ gelijk is aan 90°, dus Hoek + Complement = 90°, of

$$H + C = 90^\circ .$$

Evenzo: Hoek + Supplement = 180°, òf

$$H + S = 180^\circ .$$

Voor we nu overgaan tot het bewijzen van enkele stellingen, bespreken we nog een paar bewijsschema's. Uit de algebra is bekend, dat we beide leden van een gelijkheid met een zelfde getal mogen vermeerderen of verminderen, dus:

$$A = B \text{ (geg.)} \rightarrow A + C = B + C \text{ (schema 1a)}$$

en

$$A = B \text{ (geg.)} \rightarrow A - C = B - C \text{ (Schema 1b).}$$

We mogen de overeenkomstige leden van twee gelijkheden optellen of aftrekken, dus:

$$\left.\begin{array}{l} A = B \text{ (geg.)} \\ \\ C = D \text{ (geg,)} \end{array}\right\} \rightarrow A + C = B + D \text{ (schema 2a)}$$

en

$$\left.\begin{array}{l} A = B \text{ (geg.)} \\ \\ C = D \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow A - C = B - D \text{ (schema 2b).}$$

Dit laatste schema kan ook anders worden geschreven, namelijk:

$$\left.\begin{array}{ll} A + C = B + D & \text{(geg.)} \\ \\ C = D & \text{(geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow A = B \text{ (schema 2c).}$$

Opmerking: geg. betekent gegeven.

Als gegeven is: $A = B$, $B = C$ en $C = D$, dan mogen we volgens schema 2a de overeenkomstige leden van deze gelijkheden optellen en daarna volgens schema 1b beide leden van de nieuwe gelijkheid met $B + C$ verminderen. Uit het gegeven volgt dus eerst: $A + B + C = B + C + D$ en daaruit volgt weer: $A = D$.

In schemavorm:

$$\left.\begin{array}{l} A = B \text{ (geg.)} \\ B = C \text{ (geg.)} \\ C = D \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow A = D \text{ (schema 3).}$$

Voor een eenvoudiger geval geldt:

$$\left.\begin{array}{l} A = B \text{ (geg.)} \\ \\ B = C \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow A = C.$$

Als gegeven is: $A + B = S$ en $B + C = S$ dan mogen we volgens schema 2b de leden van de tweede gelijkheid aftrekken van de leden van de eerste gelijkheid. We krijgen dan: $A + B - B - C = S - S$ of $A - C = 0$. Nu volgens schema 1a beide leden met C vermeerderen. Dat geeft $A - C + C = C$ of $A = C$. In schemavorm:

$$\left.\begin{array}{l} A + B = S = \text{ (geg.)} \\ \\ B + C = S \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow A = C. \text{ (schema 4).}$$

Een gecompliceerder geval van schema 4 is:

$$\left.\begin{array}{ll} A + B + C = S & \text{(geg.)} \\ A' + B' + C' = S & \text{(geg.)} \\ B = B' & \text{(geg.)} \\ C = C' & \text{(geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow A = A'.$$

Tenslotte nog enige ongelijkheidsschema's. Als $A < B$ is en

A = C, dan mogen we ook hier schema 2b toepassen. We vinden dan: $A - A < B - C$ of $0 < B - C$. Volgens schema 2a wordt dit $C < B$ door bij beide leden C op te tellen. In schemavorm dus:

$$\left.\begin{array}{l} A < B \text{ (geg.)} \\ A = C \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow C < B. \text{ (schema 5)}$$

Eigenlijk hebben we hier niets anders gedaan dan het tweede gegeven substitueren in het eerste. Zo hebben we ook:

$$\left.\begin{array}{l} A < B \text{ (geg.)} \\ B = C \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow A < C.$$

Beide gevallen blijven gelden, als we het ongelijkteken omdraaien, dus

$$\left.\begin{array}{l} A > B \text{ (geg.)} \\ A = C \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow C > B$$

en

$$\left.\begin{array}{l} A > B \text{ (geg.)} \\ B = C \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow A > C.$$

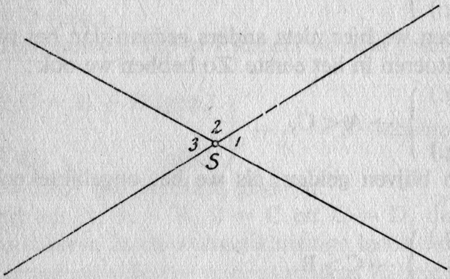
Als gegeven is: $A + B = S$ en $C + D = S$, dan volgt hieruit volgens schema 3: $A + B = C + D$ of $A - C = D - B$. Als bovendien gegeven is dat $A < C$ is, dan is $A - C < 0$, dus $D - B < 0$ of $D < B$. In schemavorm:

$$\left.\begin{array}{ll} A + B = S & \text{(geg.)} \\ C + D = S & \text{(geg.)} \\ A < C & \text{(geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow D < B \text{ of } B > D. \text{ (schema 6)}$$

Bij deze schema's is steeds sprake van gelijkheden of ongelijkheden. Zoals we gezien hebben zijn lijnstukken en hoeken steeds gebonden aan een zeker maatgetal. We mogen deze schema's nu ook toepassen, als de gelijkheden of ongelijkheden de maatgetallen van lijnstukken of hoeken betreffen. De betrekkingen, die we zo vinden tussen de maatgetallen van bepaalde lijnstukken of hoeken, gelden dan ook weer voor die lijnstukken of hoeken zelf. Uit het bovenstaande volgt nu, dat we het zestal schema's mogen toepassen op lijnstukken of hoeken. De in de schema's voorkomende letters, zoals A en B enz. waren eerst slechts symbolen voor 'iets', dat met getallen te maken had. We gingen er immers algebraïsche regels op toepassen. Dat 'iets' heeft nu een ruimere inhoud gekregen, namelijk niet alleen getallen, maar ook lijnstukken

en hoeken en verder alle objecten, die op een bepaalde ondubbelzinnige manier aan getallen gebonden zijn op dezelfde wijze als dit met lijnstukken en hoeken het geval is. Bij het bewijzen van stellingen zullen we dikwijls gebruik maken van bovenstaande bewijsschema's.

(6)



Stelling 1: **Overstaande hoeken zijn gelijk.**

Gegeven: $\angle S_1$ en $\angle S_3$ zijn overstaande hoeken. (Fig. 6)

Te bew.: $\angle S_1 = \angle S_3$.

Bewijs:
$$\left.\begin{array}{l} \angle S_1 + \angle S_2 = 180^\circ \text{ (nevenhk)} \\ \angle S_3 + \angle S_2 = 180^\circ \text{ (nevenhk)} \end{array}\right\} \rightarrow \angle S_1 = \angle S_3. \text{ (schema 4)}$$

Stelling 2: **Als twee hoeken gelijk zijn, dan zijn:**
a. Hun complementen gelijk.
b. Hun supplementen gelijk.
c. Hun nevenhoeken gelijk.

We bewijzen alleen stelling 2a en laten het bewijs van de stellingen 2b en 2c aan de lezer over.

Gegeven: $\angle A = \angle B$, $\angle A'$ is het complement van $\angle A$ en $\angle B'$ is het complement van $\angle B$.

Te bew.: $\angle A' = \angle B'$.

Bewijs: Volgens de definitie van complement is:
$$\left.\begin{array}{l} \angle A + \angle A' = 90^\circ \\ \text{en } \angle B + \angle B' = 90^\circ \\ \angle A = \angle B \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow \angle A' = \angle B'. \text{ (schema 4)}$$

Stelling 3: **Als van twee hoeken**
a. de complementen gelijk zijn, òf
b. de supplementen gelijk zijn, òf
c. de nevenhoeken gelijk zijn,
dan zijn die hoeken gelijk.

We bewijzen deze keer stelling 3b:

Gegeven: $\angle A'$ is het supplement van $\angle A$ en $\angle B'$ is het supplement van $\angle B$, $\angle A' = \angle B'$.

Te bew.: $\angle A = \angle B$.

Bewijs: Volgens de definitie van supplement is:

$$\left.\begin{array}{l} \angle A + \angle A' = 180^\circ \\ \text{en } \angle B + \angle B' = 180^\circ \\ \angle A' = \angle B' \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow \angle A = \angle B. \text{ (schema 4)}$$

Stelling 4: **Als twee hoeken ongelijk zijn, dan is:**

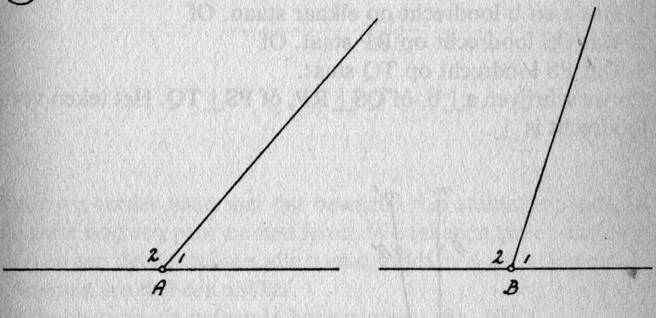
a. Het complement van de grootste hoek kleiner dan het complement van de kleinste hoek.

b. Het supplement van de grootste hoek kleiner dan het supplement van de kleinste hoek.

c. De nevenhoek van de grootste hoek kleiner dan de nevenhoek van de kleinste hoek.

We zullen in dit geval stelling 4c bewijzen.

(7)



Gegeven: $\angle A_2$ is de nevenhoek van $\angle A_1$ en $\angle B_2$ is de nevenhoek van $\angle B_1$, $\angle A_1 < \angle B_1$. (Fig. 7)

Te bew.: $\angle A_2 > \angle B_2$.

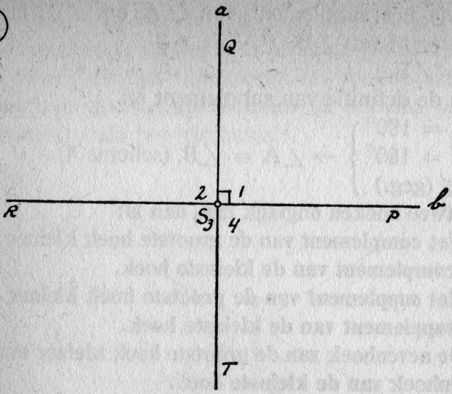
Bewijs: We hebben al gezien, dat uit de definitie volgt, dat twee nevenhoeken een gestrekte hoek vormen, dus samen 180° zijn. Dus:

$$\left.\begin{array}{l} \angle A_1 + \angle A_2 = 180^\circ \\ \text{en } \angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ \\ \angle A_1 < \angle B_1 \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow \angle A_2 > \angle B_2. \text{ (schema 6)}$$

Definitie: Twee snijdende lijnen staan loodrecht op elkaar, als ze een rechte hoek met elkaar maken. (Fig. 8)

Als $\angle S_1 = 90^\circ$, dan is ook $\angle S_2 = 90^\circ$, want $\angle S_1$ en $\angle S_2$ zijn nevenhoeken. $\angle S_3 = 90^\circ$, want $\angle S_1$ en $\angle S_3$ zijn overstaande

8

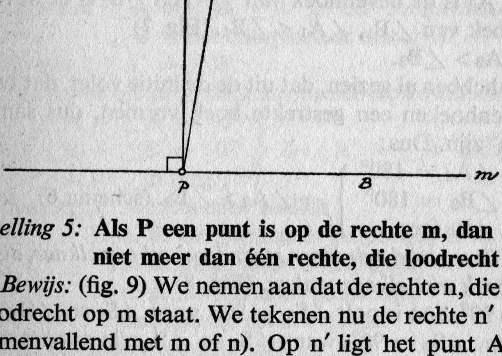


hoeken en $\angle S_4 = 90°$, want $\angle S_2$ en $\angle S_4$ zijn overstaande hoeken. Als dus twee lijnen loodrecht op elkaar staan, maken ze vier rechte hoeken met elkaar. We zeggen:

1. Dat a en b loodrecht op elkaar staan. Of
2. Dat QS loodrecht op RP staat. Of
3. Dat PS loodrecht op TQ staat.

En we schrijven $a \perp b$, òf $QS \perp RP$, òf $PS \perp TQ$. Het teken voor loodrecht is $\perp$.

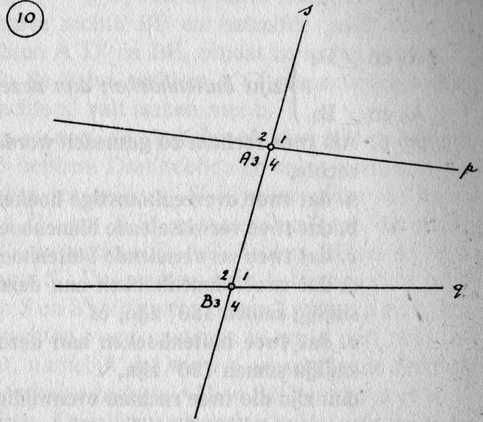
9



Stelling 5: **Als P een punt is op de rechte m, dan gaat door P niet meer dan één rechte, die loodrecht op m staat.**

Bewijs: (fig. 9) We nemen aan dat de rechte n, die door P gaat, loodrecht op m staat. We tekenen nu de rechte n′ door P (niet samenvallend met m of n). Op n′ ligt het punt A′, op n het

punt A en op m het punt B. De rechte n′ valt niet met AP of BP samen, dus het punt A′ zal altijd binnen hoek APB liggen (of binnen één van de andere rechte hoeken bij P). Volgens axioma 13 is ∠A′PB niet congruent met ∠APB, omdat A′ binnen hoek APB ligt. Volgens de definitie van loodrechte stand is ∠APB een rechte hoek, maar dan is ∠A′PB geen rechte hoek en n′ staat dus niet loodrecht op m.



Voor we verder gaan met het bewijzen van stellingen, moeten we eerst nog een paar namen leren. We tekenen twee rechten p en q en een derde rechte s, die p en q snijdt in A en B. De rechte s noemen we wel een *snijlijn*.

We hebben nu de volgende benamingen: (fig. 10)

1. De hoeken A_3, A_4, B_1 en B_2 zijn *binnenhoeken*.
2. De hoeken A_1, A_3, B_3 en B_4 zijn *buitenhoeken*.

$\angle A_1$ en $\angle B_1$
$\angle A_2$ en $\angle B_2$
$\angle A_3$ en $\angle B_3$
$\angle A_4$ en $\angle B_4$
} zijn *overeenkomstige hoeken.*

$\angle A_3$ en $\angle B_1$
$\angle A_4$ en $\angle B_2$
} zijn *verwisselende binnenhoeken.*

$\angle A_4$ en $\angle B_1$ }
$\angle A_3$ en $\angle B_2$ } zijn *binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn.*

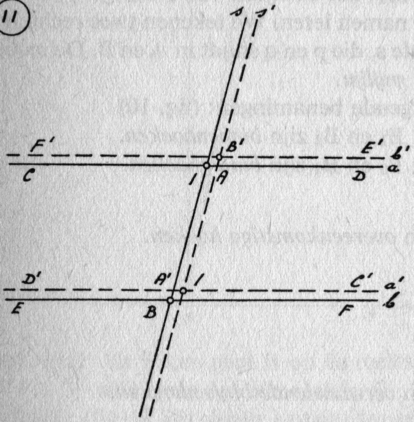
$\angle A_1$ en $\angle B_3$ }
$\angle A_2$ en $\angle B_4$ } zijn *verwisselende buitenhoeken.*

$\angle A_1$ en $\angle B_4$ }
$\angle A_2$ en $\angle B_3$ } zijn *buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn.*

Stelling 6: **Als twee rechten zó gesneden worden door een derde rechte,**
a. dat twee overeenkomstige hoeken gelijk zijn, òf
b. dat twee verwisselende binnenhoeken gelijk zijn, òf
c. dat twee verwisselende buitenhoeken gelijk zijn, òf
d. dat twee binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn samen 180° zijn, òf
e. dat twee buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn samen 180° zijn,
dan zijn die twee rechten evenwijdig.

We bewijzen eerst stelling 6b. (Zie ook hoofdstuk VII.)

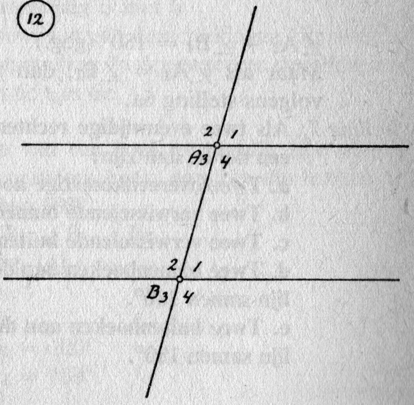
(11)



Gegeven: $\angle A_1 = \angle B_1$. (Fig. 11)
Te bew.: a // b.

Bewijs: Er is een verplaatsing, waarbij A′B′ overgaat in BA en s′ dus met s samenvalt. (Gemakshalve geven we de figuur na de verplaatsing aan met accenten bij de letters.) Omdat $\angle B'_1 = \angle A_1$ valt de halve rechte B′F′ samen met de halve rechte AC en hetzelfde geldt voor de halve rechten B′E′ en AD, omdat ze in het verlengde liggen van de halve rechten B′F′ respectievelijk AC. Dus de rechte b′ valt samen met de rechte a. Omdat $\angle A'_1 = \angle B_1$ valt de halve rechte A′C′ samen met de halve rechte BF en hetzelfde geldt voor de halve rechten A′D′ en BE, omdat ze in het verlengde liggen van de halve rechten A′C′ respectievelijk BF. Dus de rechte a′ valt samen met b.
We nemen nu aan, dat de halve rechten AD en BF een snijpunt S hebben. Dan hebben de halve rechten A′D′ en B′F′ dus een snijpunt S′. Omdat echter de halve rechten A′D′ en B′F′ samenvallen met de halve rechten BE respectievelijk AC, hebben BE en AC dus een snijpunt S′. De rechten a en b hebben dan twee snijpunten S en S′. Volgens axioma 1 stellen a en b dan dezelfde rechten voor en dat is in strijd met ons uitgangspunt, namelijk dat a en b verschillende rechten zijn. Dus de halve rechten AD en BF kunnen geen snijpunt hebben. Dezelfde redenering geldt ook voor de halve rechten AC en BE, die dus ook geen snijpunt hebben. Daaruit volgt, dat a en b geen snijpunt hebben en dus evenwijdig zijn.

12



Stelling 6a:
Gegeven: $\angle A_1 = \angle B_1$. (Fig. 12)
Te bew.: a // b
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle A_3 \text{ (overstaande hk)} \\ \angle A_1 = \angle B_1 \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle A_3 = \angle B_1. \text{ (schema 3)}$$

Maar als $\angle A_3 = \angle B_1$, dan zijn a en b evenwijdig volgens stelling 6b.

Stelling 6c:
Gegeven: $\angle A_1 = \angle B_3$ (fig. 12).
Te bew.: a // b.
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\angle B_3 = \angle B_1 \text{ (overstaande hk)} \\ \angle A_1 = \angle B_3 \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle A_1 = \angle B_1 \text{ (schema 3)}$$

Maar als $\angle A_1 = \angle B_1$, dan zijn a en b evenwijdig volgens stelling 6a.

Stelling 6d:
Gegeven: $\angle A_4 + \angle B_1 = 180^\circ$ (fig. 12).
Te bew.: a // b.
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_4 + \angle A_1 = 180^\circ \text{ (nevenhk)} \\ \angle A_4 + \angle B_1 = 180^\circ \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle A_1 = \angle B_1. \text{ (schema 4)}$$

Maar als $\angle A_1 = \angle B_1$, dan zijn a en b evenwijdig volgens stelling 6a.

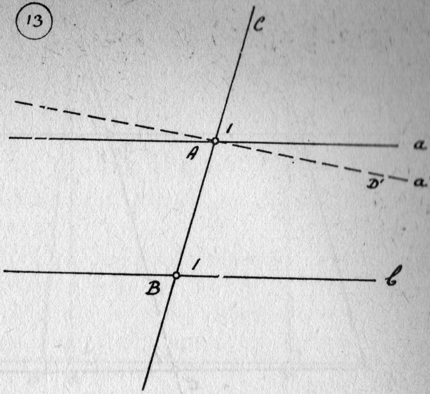
Stelling 6e:
Gegeven: $\angle A_1 + \angle B_4 = 180^\circ$ (fig. 12)
Te bew.: a // b.
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\angle B_1 + \angle B_4 = 180^\circ \text{ (nevenhk)} \\ \angle A_1 + \angle B_4 = 180^\circ \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle A_1 = \angle B_1 \text{ (schema 4)}$$

Maar als $\angle A_1 = \angle B_1$, dan zijn a en b evenwijdig volgens stelling 6a.

Stelling 7: **Als twee evenwijdige rechten gesneden worden door een derde, dan zijn:**

a. Twee overeenkomstige hoeken gelijk.
b. Twee verwisselende binnenhoeken gelijk.
c. Twee verwisselende buitenhoeken gelijk.
d. Twee binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn samen 180°.
e. Twee buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn samen 180°.



Stelling 7a:
Gegeven: a // b. (fig. 13)
Te bew.: $\angle A_1 = \angle B_1$.
Bewijs: We trekken door A een lijn a′, zódanig, dat $\angle CAD' = \angle B_1$. Volgens stelling 6a is dan a′ // b. Maar als a′ // b is en a // b (geg.), dan is volgens axioma 4 a′ // a. Omdat a en a′ elkaar snijden in A, kunnen ze niet evenwijdig zijn en moeten ze dus samenvallen, zodat $\angle CAD'$ dezelfde hoek is als $\angle A_1$. Omdat $\angle CAD' = \angle B_1$, is dus ook $\angle A_1 = \angle B_1$.

Opmerking: Met dit laatste bewijs is tegelijkertijd aangetoond:

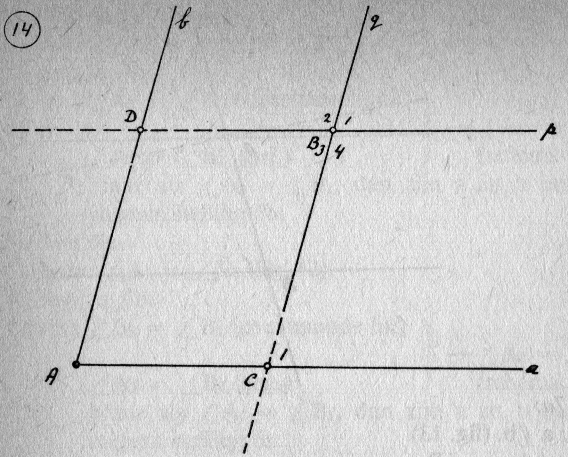
Stelling 8: **Door een punt A buiten een lijn b gaat slechts één rechte, die evenwijdig is met b.**

Stelling 7b t/m 7e: De bewijzen van deze stellingen zijn weer af te leiden met behulp van stelling 7a op ongeveer dezelfde manier als bij de stellingen 6c t/m 6e.

Stelling 9: **Als de benen van een hoek evenwijdig zijn met de benen van een andere hoek, dan zijn die hoeken òf gelijk, òf samen 180°.**

Gegeven: $\angle A$, $\angle B_1$, $\angle B_2$, $\angle B_3$, $\angle B_4$,
a // p, b // q. (fig. 14)

Te bew.:
1. $\angle A = \angle B_1$.
2. $\angle A = \angle B_3$.
3. $\angle A + \angle B_2 = 180°$.
4. $\angle A + \angle B_4 = 180°$.



Bewijs: C en D zijn de snijpunten van de halve rechten a en b (of van hun verlengde) met de rechten p en q.

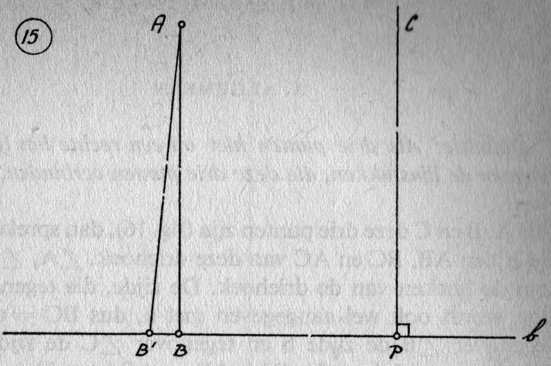
1. b // q (geg.) →
   p // a (geg.) →

→ ∠A = ∠C_1 (overeenkomstige hk)
→ ∠B_1 = ∠C_1 (idem)
} → ∠A = ∠B_1.

2. ∠A = ∠B_1 (zie 1)
   ∠B_3 = ∠B_1 (overstaande hk)
   } → ∠A = ∠B_3.

3. ∠B_1 + ∠B_2 = 180° (nevenhk)
   ∠A = ∠B_1 (zie 1)
   } →
   → ∠A + ∠B_2 = 180°.

4. ∠B_1 + ∠B_4 = 180° (nevenhk)
   ∠A = ∠B_1 (zie 1)
   } →
   → ∠A + ∠B_4 = 180°.



Stelling 10: **Door een punt A buiten een lijn b gaat slechts één rechte die loodrecht op b staat.**

Gegeven: Punt A en rechte b. (fig. 15)

Te bew.: Door A gaat slechts één loodlijn op b.

Bewijs: Als P een punt van b is, dan gaat door P slechts één rechte, die loodrecht op b staat (st. 5), namelijk PC. We nemen nu aan, dat er door A meer rechten gaan, die loodrecht op b staan, bijvoorbeeld AB en AB′.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\angle P = 90^\circ\\ \angle B = 90^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \angle P = \angle B \rightarrow AB /\!/ PC \text{ (st. 6)} \\ \\ \left.\begin{array}{l}\angle P = 90^\circ\\ \angle B' = 90^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \angle P = \angle B' \rightarrow AB' /\!/ PC \text{ (idem)}\end{array}\right\} \rightarrow$$

AB en AB′ zijn beide evenwijdig met PC en dan is volgens axioma 4 AB //AB′. Omdat AB en AB′ elkaar snijden in A, kan dit niet en vallen AB en AB′ samen. Er is dus slechts één loodlijn door A op b.

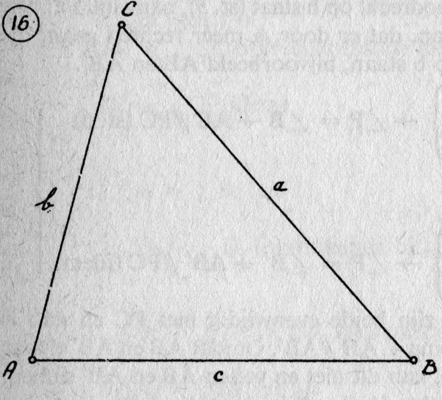
III. DE DRIEHOEK

A. ALGEMEEN

Definitie: Als drie punten niet op een rechte lijn liggen, dan vormen de lijnstukken, die deze drie punten verbinden, een driehoek.

Als A, B en C deze drie punten zijn (fig. 16), dan spreken we van de zijden AB, BC en AC van deze driehoek. ∠A, ∠B en ∠C zijn de hoeken van de driehoek. De zijde, die tegenover ∠A ligt, wordt ook wel aangegeven met a, dus BC = a. Zo ligt tegenover ∠B de zijde b en tegenover ∠C de zijde c. ∠A wordt gevormd door de zijden AB en AC (c en b) van de driehoek en we zeggen dan, dat ∠A de *ingesloten hoek* is van AB en AC. ∠A is een *aanliggende hoek* van zijde AB en voor ∠B geldt hetzelfde. ∠A is de *overstaande hoek* van zijde BC en omgekeerd is BC de *overstaande zijde* van ∠A.

16



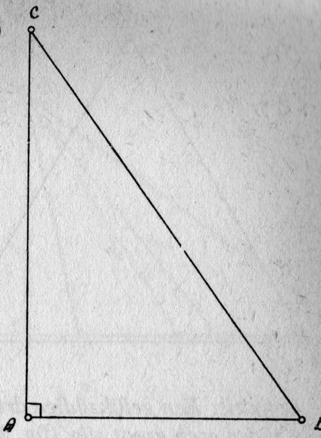
Definitie: Een scherphoekige driehoek is een driehoek met drie scherpe hoeken. (fig. 16)

Definitie: Een rechthoekige driehoek is een driehoek met één rechte hoek. (fig. 17)

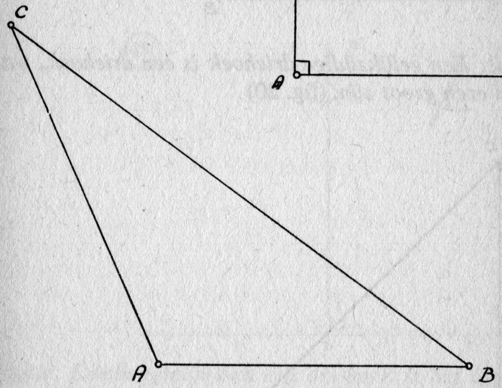
Definitie: Een stomphoekige driehoek is een driehoek met één stompe hoek. (fig. 18)

Definitie: Een gelijkbenige driehoek is een driehoek, waarvan twee zijden gelijk zijn. (fig. 19)

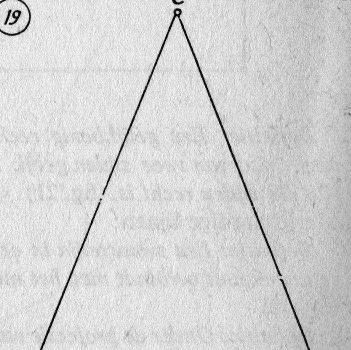
17

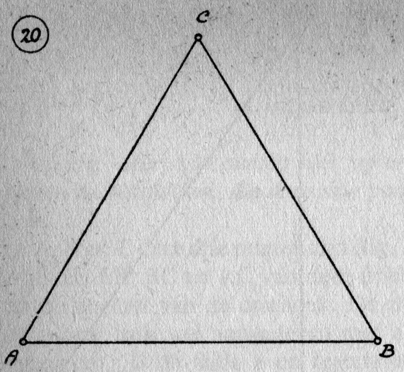


18

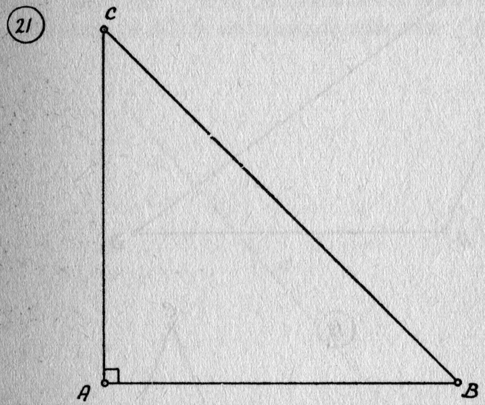


19





Definitie: Een gelijkzijdige driehoek is een driehoek, waarvan alle zijden even groot zijn. (fig. 20)

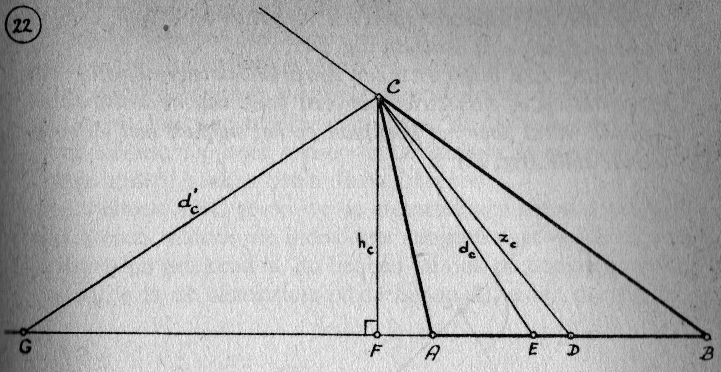


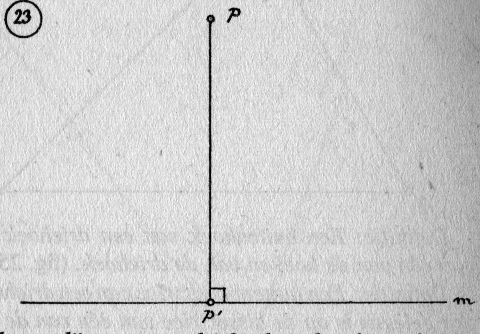
Definitie: Een gelijkbenig rechthoekige driehoek is een driehoek, waarvan twee zijden gelijk zijn, terwijl de ingesloten hoek van die zijden recht is. (fig. 21)

Merkwaardige lijnen:

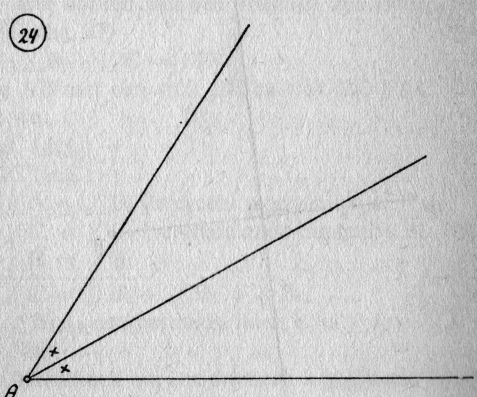
Definitie: Een zwaartelijn in een driehoek is een lijnstuk, dat een hoekpunt verbindt met het midden van de overstaande zijde. (fig. 22)

Definitie: Onder de projectie van een punt P op een lijn m verstaan we het voetpunt P′ van de loodlijn, die uit P op de rechte m is neergelaten.





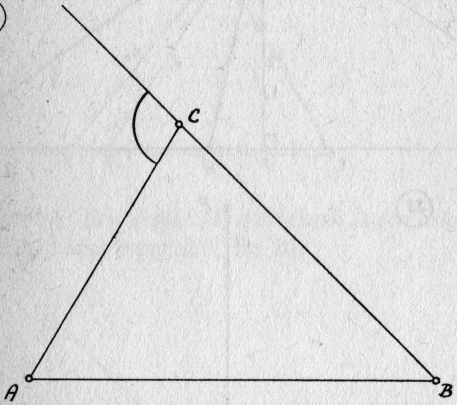
Definitie: Een hoogtelijn van een driehoek is het lijnstuk, dat een hoekpunt van die driehoek verbindt met de projectie van dat hoekpunt op de overstaande zijde. (fig. 22)



Definitie: Een bissectrice van een hoek is de rechte, die de hoek in twee gelijke delen verdeelt. (fig. 24)

Definitie: Een bissectrice van een driehoek is een lijnstuk, dat gelegen is op de bissectrice van een hoek van de driehoek en begrensd wordt door het hoekpunt en het snijpunt met de overstaande zijde. (fig. 22)

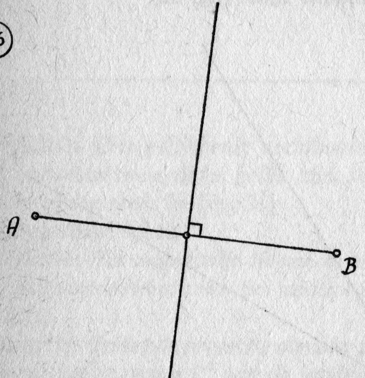
(25)



Definitie: Een buitenhoek van een driehoek is een nevenhoek van één van de hoeken van de driehoek. (fig. 25)

Definitie: Een buitenbissectrice van een driehoek is het lijnstuk, dat gelegen is op de bissectrice van één van de buitenhoeken van die driehoek en begrensd wordt door het hoekpunt en het snijpunt met de overstaande zijde. (fig. 22)

(26)

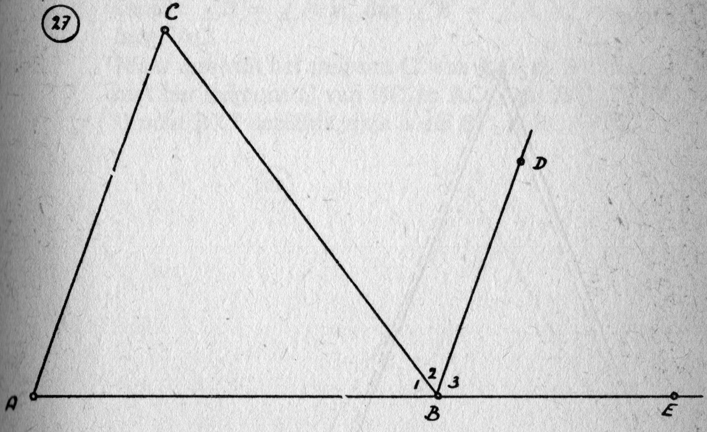


Definitie: Een middelloodlijn van een lijnstuk is de rechte, die dat lijnstuk loodrecht middendoor deelt. (fig. 26)

In een driehoek hebben we nog de volgende benamingen: Eén van de zijden van de driehoek noemen we de *basis* van de driehoek. De twee andere zijden heten de *opstaande zijden* van de driehoek. De hoek tegenover de basis is de *tophoek* en de beide andere hoeken heten de *basishoeken.*

In driehoek ABC geven we de zwaartelijnen meestal aan met z_a, z_b en z_c, waarbij de indexletter aangeeft naar welke zijde de zwaartelijn getekend is. Zo hebben we ook de hoogtelijnen h_a, h_b en h_c en de bissectrices of deellijnen d_a, d_b en d_c. (fig. 22)

27



Stelling 11: **De drie hoeken van een driehoek zijn samen 180°**

Gegeven: $\triangle$ABC. (fig. 27)

Te bew.: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Bewijs: Verleng AB met een stuk BE en trek BD // AC. Dan hebben we:

BD // AC (geg.) →

BD // AC (geg.) →

→ $\angle A = \angle B_3$ (overeenkomende hk, st. 7a)

→ $\angle C = \angle B_2$ (verwisselende binnenhk, st. 7b)

$\angle B = \angle B_1$

$\angle A + \angle B + \angle C = \angle B_1 + \angle B_2 + \angle B_3$,

Omdat $\angle B_{1,2,3}$ een gestrekte hoek is, is $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Stelling 12: **Een buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som**

van de twee niet-aanliggende binnenhoeken.

Gegeven: $\triangle ABC$ met de buitenhoek van $\angle B$ (fig. 27).

Te bew.: $\angle B_{2,3} = \angle A + \angle C$.

Bewijs: Verleng AB met een stuk BE en trek BD // AC. Dan hebben we:

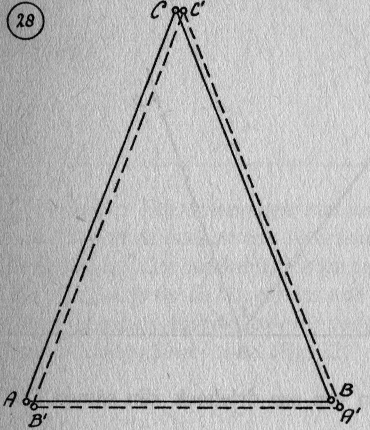
BD // AC (geg.) → $\angle B_2 = \angle C$ (verwisselende binnen-hk, st. 7b)

BD // AC (geg.) → $\angle B_3 = \angle A$ (overeenkomende hk, st. 7a)

$$\overline{\angle B_{2,3} = \angle A + \angle C.} \; +$$

Opmerking: In een gelijkbenige driehoek noemen we de twee gelijke zijden de *benen* van de driehoek. De derde zijde is dan de basis.

28



Stelling 13: **Als een driehoek gelijkbenig is, dan zijn de basishoeken gelijk.**

Gegeven: $\triangle ABC$, AC = BC. (fig. 28)

Te bew.: $\angle A = \angle B$.

Bewijs: Er is een verplaatsing, waarbij we de verplaatste driehoek aangeven met A′B′C′, zódanig, dat C′ in C komt en C′B′ langs CA valt.

Omdat CB = CA, dus C′B′ = CA, komt B′ in A.

Omdat $\angle C' = \angle C$ is, valt C′A′ langs CB.

Omdat C′A′ = CB is, komt A′ in B.

Omdat B′ in A en A′ in B komt, valt $\angle A'B'C'$ samen met $\angle A$ dus $\angle B' = \angle A$.

Omdat $\angle B'$ dezelfde hoek is als $\angle B$, is dus ook $\angle B = \angle A$.

Stelling 14: **Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan is die driehoek gelijkbenig.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $\angle A = \angle B$. (fig. 28)

Te bew.: AC = BC.

Bewijs: Er is een verplaatsing, waarbij we de verplaatste driehoek aangeven met A′B′C′, zódanig, dat B′ in A komt en B′A′ langs AB valt.

Omdat B′A′ = AB is, komt A′ in B.

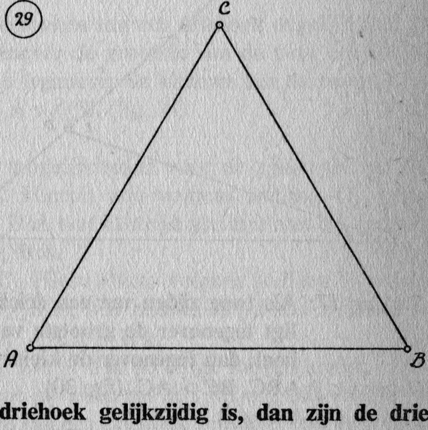
Omdat $\angle A = \angle B$ is, dus $\angle A' = \angle B$ is, valt A′C′ langs BC.

Omdat $\angle B = \angle A$ is, dus $\angle B' = \angle A$ is, valt B′C′ langs AC.

Maar dan valt het snijpunt C′ van A′C′ en B′C′ samen met het snijpunt C van BC en AC. Dus B′C′ = AC.

Omdat B′C′ dezelfde zijde is als BC, is BC = AC.

29



Stelling 15: **Als een driehoek gelijkzijdig is, dan zijn de drie hoeken ieder 60°.**

Gegeven: $\triangle ABC$, AB = BC = AC. (fig. 29)

Te bew.: $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

Bewijs: BC = AC (geg.) → $\angle A = \angle B$ (st. 13)

AC = AB (geg.) → $\angle B = \angle C$ (st. 13) } →

→ $\angle A = \angle B = \angle C$.

De drie hoeken A, B en C zijn dus gelijk.

Volgens stelling 11 zijn ze samen 180°. Ieder van de

hoeken A, B en C is dus 60°.

Stelling 16: **Als twee hoeken van een driehoek gelijk zijn aan twee hoeken van een andere driehoek, dan is de derde hoek van de ene driehoek gelijk aan de derde hoek van de andere driehoek.**

Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$.

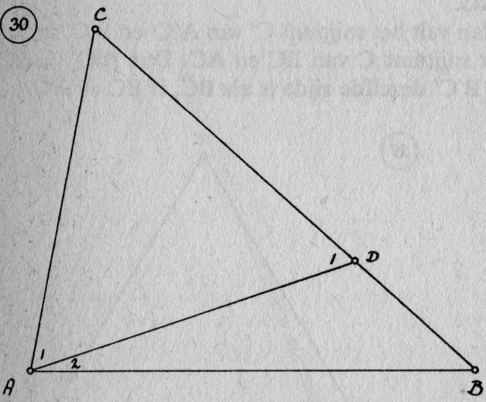
Te bew.: $\angle C = \angle F$.

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ (st. 11)}\\ \angle D + \angle E + \angle F = 180^\circ \text{ (st. 11)}\\ \angle A = \angle D \text{ (geg.)}\\ \angle B = \angle E \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow \angle C = \angle F$. (schema 4)

30



Stelling 17: **Als twee zijden van een driehoek ongelijk zijn, dan ligt tegenover de grootste van de twee een grotere hoek dan tegenover de kleinste van de twee.**

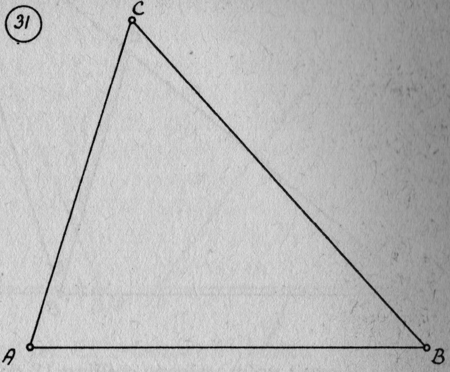
Gegeven: $\triangle ABC$, $BC > AC$. (fig. 30)

Te bew.: $\angle A > \angle B$.

Bewijs: We nemen op BC een punt D, zòdanig dat $CD = AC$. D ligt dan tussen B en C, omdat $CD < CB$ is en AD ligt dus binnen $\angle BAC$.

$$\left.\begin{array}{l}AC = CD \rightarrow \angle D_1 = \angle A_1 \text{ (st. 13)}\\ \\ \qquad \angle D_1 = \angle A_2 + \angle B \text{ (st. 12)}\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \angle A_1 = \angle A_2 + \angle B$$
$$\angle A_2 = \angle A_2 \quad +$$
$$\angle A_{1,2} = 2\angle A_2 + \angle B \rightarrow \angle A_{1,2} > \angle B.$$



Stelling 18: **Als twee hoeken van een driehoek ongelijk zijn, dan ligt tegenover de grootste van de twee een grotere zijde dan tegenover de kleinste van de twee.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $\angle A > \angle B$. (fig. 31)

Te bew.: $BC > AC$.

Bewijs: Er zijn drie mogelijkheden voor de zijden BC en AC:

1. $BC < AC$. Hieruit zou volgens stelling 17 volgen, dat $\angle A < \angle B$ is, wat in strijd zou zijn met het gegeven, dat $\angle A > \angle B$ is.
2. $BC = AC$. Hieruit zou volgens stelling 13 volgen, dat $\angle A = \angle B$ is, wat ook in strijd zou zijn met het gegeven, dat $\angle A > \angle B$ is.
3. $BC > AC$. Dit is dus de enige mogelijkheid, omdat de eerste twee gevallen tot een strijdigheid voeren.

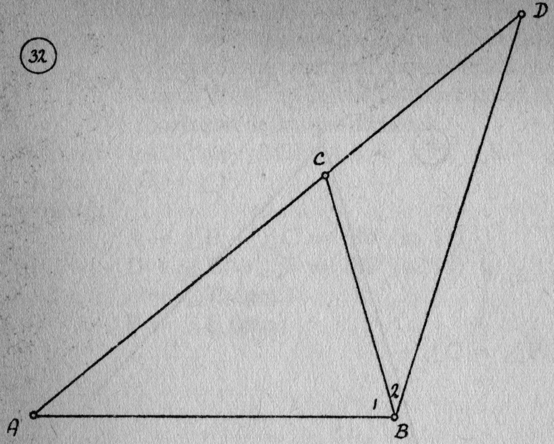
Stelling 19: **Een zijde van een driehoek is kleiner dan de som van de twee andere zijden.**

Gegeven: $\triangle ABC$. (fig. 32)

Te bew.: $AB < AC + BC$.

Bewijs: We verlengen AC met een stuk CD, dat gelijk is aan BC, dus $AD = AC + BC$. We moeten dus bewijzen, dat $AB < AD$ is. Omdat C tussen A en D ligt, is

$$\left.\begin{array}{r} \angle B_2 < \angle B_{1,2} \\ CD = CB \rightarrow \angle B_2 = \angle D \text{(st. 13)} \end{array}\right\} \angle D < \angle B_{1,2}.$$



Hieruit volgt volgens stelling 18 dat AB < AD is, dus dat AB < AC + BC is.

Stelling 20: **Een zijde van een driehoek is groter dan het verschil van de twee andere zijden.**

Gegeven: △ABC, AC > BC. (fig. 32)

Te bew.: AB > AC − BC.

Bewijs: Volgens stelling 19 is

$$\left.\begin{array}{l} AC < AB + BC \\ BC = BC \end{array}\right\} \rightarrow AC - BC < AB \text{ of } AB > AC - BC.$$

Stelling 21: **Als twee zijden van een driehoek gelijk zijn aan twee zijden van een andere driehoek en de ingesloten hoek in de eerste driehoek is groter dan de ingesloten hoek in de tweede driehoek, dan is de derde zijde van de eerste driehoek groter dan de derde zijde van de tweede driehoek.**

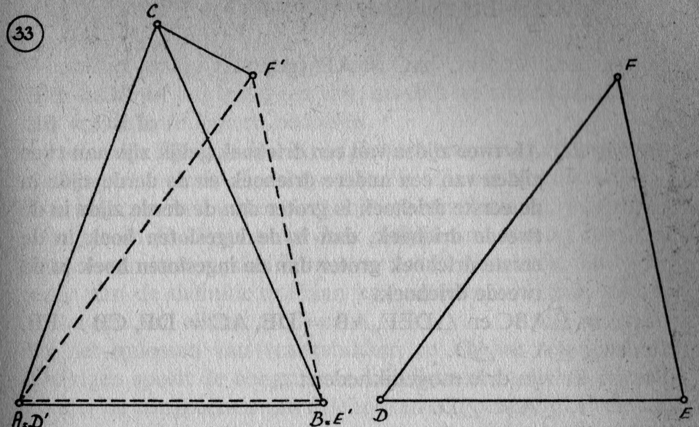
Gegeven: △ABC en △DEF, AB = DE, AC = DF, ∠A > ∠D.

Te bew.: BC > EF.

Bewijs: Er is een verplaatsing, waarbij △DEF overgaat in △D′E′F′ zodanig, dat D′ in A komt en E′ in B (omdat DE = AB).

Er zijn nu drie mogelijkheden:

1. F′ ligt buiten △ABC.
2. F′ ligt op BC.
3. F′ ligt binnen △ABC.

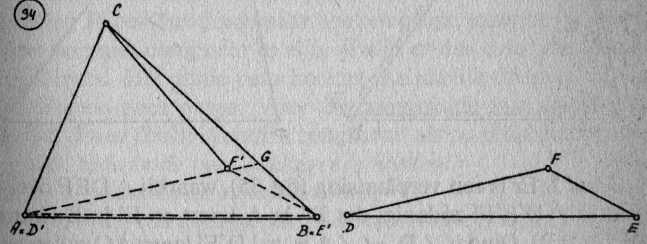


Geval 1: (fig. 33) Trek CF′. Omdat F′ buiten △ABC, dus ook buiten ∠ACB ligt, hebben we

$$\left.\begin{array}{r}\angle BCF' < \angle ACF' \\ AC = D'F' \rightarrow \angle ACF' = \angle AF'C \text{ (st. 13)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle BCF' < \angle AF'C.$$

Omdat ∠AF′C weer kleiner is dan ∠BF′C is ook ∠BCF′ < ∠BF′C. Volgens stelling 18 is dan E′F′ < BC, dus EF < BC of BC > EF.

Geval 2: Als F′ op BC ligt, dan ligt F′ tussen B en C, omdat ∠D < ∠A is. Maar dan is dus BC > E′F′, dus BC > EF.



Geval 3: (fig. 34) F′ ligt binnen △ABC.

In △ACG is AC + CG > AF′ + F′G

In △F′BG is F′G + BG > F′E′ +

$$AC + CG + F'G + BG > AF' + F'G + F'E' \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\rightarrow AC + BC + F'G > AF' + F'G + F'E' \\ AC = AF' \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow BC > F'E'$
of $BC > FE$.

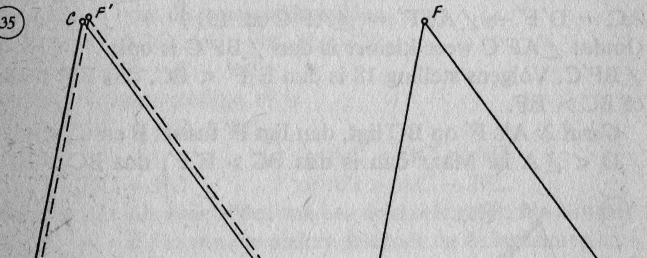
Stelling 22: **Als twee zijden van een driehoek gelijk zijn aan twee zijden van een andere driehoek en de derde zijde in de eerste driehoek is groter dan de derde zijde in de tweede driehoek, dan is de ingesloten hoek in de eerste driehoek groter dan de ingesloten hoek in de tweede driehoek.**

Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$, $AB = DE$, $AC = DF$, $CB > FE$.
Te bew.: $\angle A > \angle D$.
Bewijs: Er zijn drie mogelijkheden:

1. $\angle A < \angle D$.
2. $\angle A = \angle D$.
3. $\angle A > \angle D$.

Geval 1: Als $\angle A < \angle D$ is, dan zou volgens stelling 21 $BC < EF$ zijn, wat in strijd is met het gegeven, dat $BC > EF$ is.

35



Geval 2: Er is een verplaatsing (fig. 35), waarbij $\triangle DEF$ overgaat in $\triangle D'E'F'$ zódanig, dat D′ in A komt en E′ in B (want $DE = AB$). Omdat $\angle D = \angle A$ is, zal D′F′ langs AC vallen en daar $DF = AC$ zal F′ in C komen. Dus dan is $BC = E'F'$ en ook $BC = EF$, hetgeen in strijd is met het gegeven, dat $BC > EF$ is.

Geval 3: Daar de beide vorige mogelijkheden tot een strijdigheid voeren, zal dus voldaan moeten zijn aan deze derde mogelijkheid, namelijk dat $\angle A > \angle D$ is.

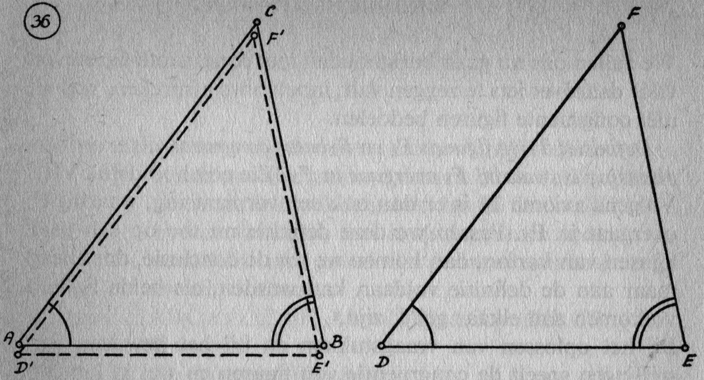
We zullen ons nu gaan bezighouden met congruente figuren en vóór daarover iets te zeggen valt, moeten we afspreken, wat we met congruente figuren bedoelen.

Definitie: Twee figuren F_1 en F_2 heten congruent, als er een verplaatsing is, waarbij F_1 overgaat in F_2. (Zie ook hoofdstuk VII.) Volgens axioma 14 is er dan ook een verplaatsing, waarbij F_2 overgaat in F_1. Passen we deze definitie nu toe op een paar figuren van karton, dan komen we tot de conclusie, dat alleen maar aan de definitie voldaan kan worden, als beide figuren volkomen aan elkaar gelijk zijn.
Bij het oplossen van vraagstukken en bij het bewijzen van stellingen speelt de congruentie van figuren en wel in het bijzonder de congruentie van driehoeken een belangrijke rol. Het zou echter, als we de congruentie van twee figuren wilden aantonen, een nogal omslachtige methode zijn, als we slechts met behulp van de definitie tot congruentie zouden kunnen besluiten. We zullen dus naar andere middelen uitzien. De gedachte zou bij ons kunnen opkomen, dat we, als we de definitie niet willen gebruiken, zouden moeten aantonen, dat alle elementen van de ene figuur gelijk zijn aan de elementen van de andere figuur. Dit is echter niet nodig. Bij twee driehoeken is het voldoende te bewijzen, dat ze drie onafhankelijke elementen gelijk hebben, zoals straks zal blijken. Deze elementen moeten dus wel onderling onafhankelijk zijn. Als twee driehoeken namelijk twee paar hoeken gelijk hebben, hebben ze volgens stelling 16 ook het derde paar hoeken gelijk, maar ze behoeven dan nog niet congruent te zijn, al zijn er dus drie paar gelijke elementen. Het derde paar hoeken is namelijk afhankelijk van de andere twee paren. Voor de congruentie van driehoeken geldt: Twee driehoeken zijn congruent, als ze gelijk hebben:

1. *Eén zijde en de twee aanliggende hoeken.*
2. *Twee zijden en de ingesloten hoek.*
3. *Eén zijde, een aanliggende en de overstaande hoek.*
4. *De drie zijden.*
5. *Twee zijden en de hoek tegenover één van die zijden.*

Voor ieder van deze vijf gevallen trachten we nu te bewijzen, dat die twee driehoeken congruent zijn, d.w.z. uitgaande van de gelijke elementen proberen we nu aan te tonen, dat de ene driehoek door een verplaatsing in de andere kan overgaan, dus dat voldaan is aan de definitie van congruentie.

(36)



Stelling 23: **Als twee driehoeken een zijde en de twee aanliggende hoeken gelijk hebben, dan zijn ze congruent.** Geval H.Z.H.

Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$, $AB = DE$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$. (fig. 36)

Te bew.: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bewijs: Er is een verplaatsing, waarbij $\triangle DEF$ overgaat in $\triangle D'E'F'$, zódanig, dat $D'E'$ langs AB komt en D′ in A.

Omdat $D'E' = AB$ zal dan E′ in B komen.

Omdat $\angle D' = \angle A$ zal $D'F'$ langs AC liggen, waarbij het nog niet zeker is, of F′ in C komt, want we weten niet of $D'F'$ en AC even lang zijn.

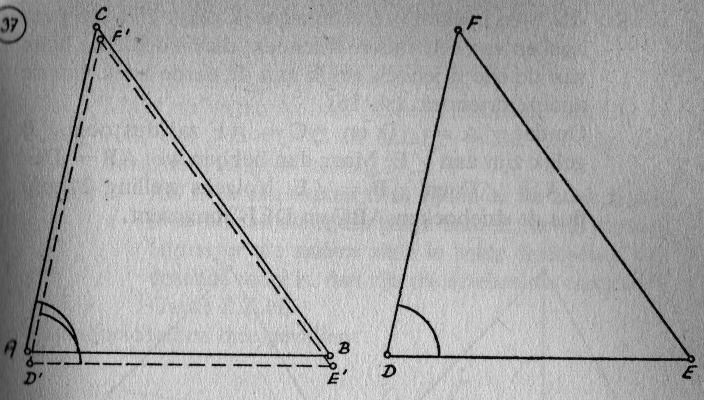
Omdat $\angle E' = \angle B$ zal $E'F'$ langs BC liggen, maar het is nog steeds niet zeker, dat F′ in C ligt, omdat we niet weten of $E'F'$ en BC even lang zijn.

Omdat $D'F'$ en $E'F'$ langs AC en BC liggen, zal het snijpunt van $D'F'$ en $E'F'$ zowel op AC als op BC liggen, dus op het snijpunt van AC en BC. Hieruit volgt, dat F′ en C samenvallen. Maar dan gaat $\triangle DEF$ juist in $\triangle ABC$ over en is voldaan aan de definitie van congruentie, zodat we mogen zeggen, dat de driehoeken ABC en DEF congruent zijn.

Stelling 24: **Als twee driehoeken twee zijden en de ingesloten hoek gelijk hebben, dan zijn ze congruent.** Geval Z.H.Z.

Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$, $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle A = \angle D$, (fig. 37)

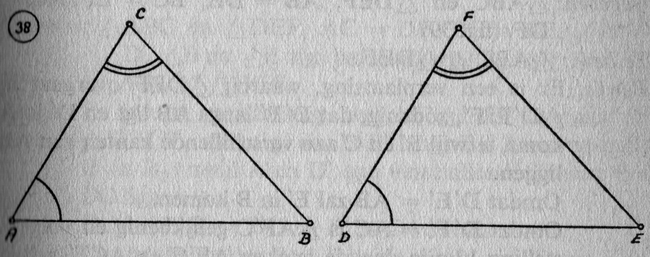
37



Te bew.: △ABC ≌ △DEF.

Bewijs: Er is een verplaatsing, waarbij △DEF overgaat in △D′E′F′, zódanig, dat D′E′ langs AB komt en D′ in A.
Omdat D′E′ = AB zal dan E′ in B komen.
Omdat ∠D′ = ∠A zal D′F′ langs AC liggen.
Omdat D′F′ = AC zal F′ in C komen, maar dan zal ook E′F′ samenvallen met BC. △DEF gaat dus over in △ABC en aan de definitie van congruentie is dus voldaan, zodat we mogen zeggen, dat de driehoeken ABC en DEF congruent zijn.

38



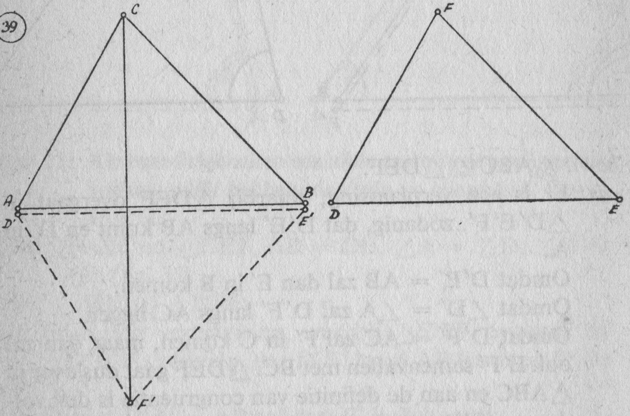
Stelling 25: **Als twee driehoeken een zijde, een aanliggende en de overstaande hoek gelijk hebben, dan zijn ze congruent.** Geval Z.H.H.

Gegeven: △ABC en △DEF, AB = DE, ∠A = ∠D, ∠C = ∠F. (fig. 38)

Te bew.: △ABC ≌ △DEF.

Bewijs: Als twee hoeken van een driehoek gelijk zijn aan twee hoeken van een andere driehoek, dan is de derde hoek van de ene driehoek gelijk aan de derde hoek van de andere driehoek. (st. 16)
Omdat $\angle A = \angle D$ en $\angle C = \angle F$ zal dus ook $\angle B$ gelijk zijn aan $\angle E$. Maar dan hebben we: AB = DE, $\angle A = \angle D$ en $\angle B = \angle E$. Volgens stelling 24 zijn dus de driehoeken ABC en DEF congruent.

(39)



Stelling 26: **Als twee driehoeken drie zijden gelijk hebben, dan zijn ze congruent.** Geval Z.Z.Z.

Gegeven: $\triangle$ABC en $\triangle$DEF, AB = DE, BC = EF, AC = DF. (fig. 39)

Te bew.: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bewijs: Er is een verplaatsing, waarbij $\triangle$DEF overgaat in $\triangle D'E'F'$, zódanig, dat D'E' langs AB ligt en D' in A komt, terwijl F' en C aan verschillende kanten van AB liggen.
Omdat D'E' = AB zal E' in B komen.
Omdat D'F' = AC is $\triangle AF'C$ gelijkbenig en volgens stelling 13 zijn dan de hoeken AF'C en ACF' gelijk.
Omdat E'F' = BC is $\triangle BF'C$ gelijkbenig en volgens stelling 13 zijn dus de hoeken BF'C en BCF' gelijk.
We hebben dus:

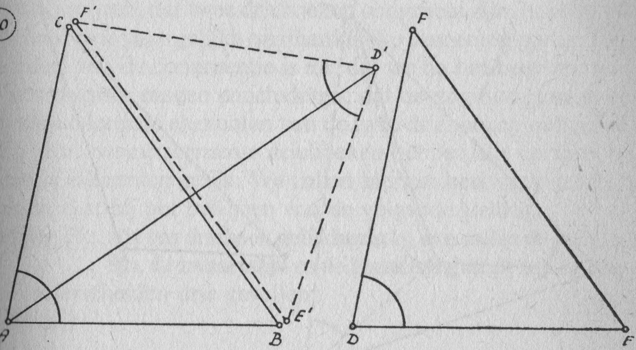
$$D'F' = AC \rightarrow \angle AF'C = \angle ACF'$$
$$E'F' = BC \rightarrow \angle BF'C = \angle BCF'$$
$$\overline{\angle D'F'E' = \angle ACB.} +$$

Maar nu weten we van beide driehoeken, dat DF = AC, dat $\angle F = \angle C$ en dat EF = BC. Ze zijn dus congruent volgens stelling 24.

Stelling 27: **Als twee driehoeken twee zijden en de hoek tegenover een van die zijden gelijk hebben, terwijl de hoek tegenover die andere zijde in beide driehoeken van dezelfde soort is, dan zijn die driehoeken congruent.** Geval Z.Z.H.

We onderscheiden drie gevallen:

40



Geval 1:

Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$, AC = DF, BC = EF, $\angle A = \angle D$, $\angle B$ en $\angle E$ zijn beide *scherp*. (fig. 40)

Te bew.: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bewijs: Er is een verplaatsing, waarbij $\triangle DEF$ overgaat in $\triangle D'E'F'$, zódanig, dat E'F' langs BC komt en punt E' in B, terwijl A en D' aan verschillende kanten van BC liggen.
Omdat E'F' = BC zal F' in C komen.
Omdat de hoeken B en E beide scherp zijn, liggen B en C aan verschillende kanten van AD'.
Verder hebben we:

$$\angle A = \angle D' \text{ (geg.)}$$
$$D'F' = AC \rightarrow \angle CAD' = \angle CD'A \text{ (st. 13)} -$$
$$\overline{\angle BAD' = \angle BD'A} \rightarrow AB = D'E'.$$
(st. 14)

Maar nu weten we van beide driehoeken, dat AB = DE, dat BC = EF en dat AC = DF. Ze zijn dus congruent volgens stelling 26.

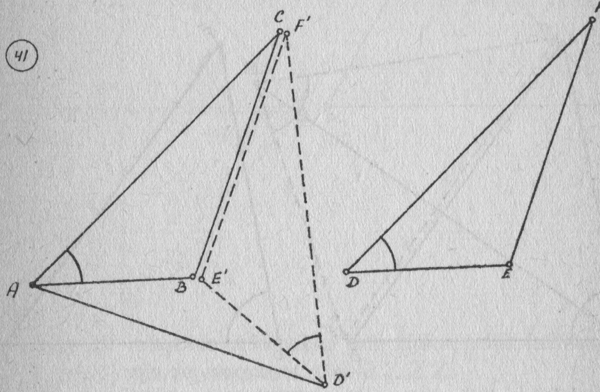
Geval 2:

Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$, AC = DF, BC = EF, $\angle A = \angle D$, $\angle B$ en $\angle E$ zijn beide *recht*.

Te bew.: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bewijs: Als $\angle B$ en $\angle E$ beide recht zijn, zijn ze dus gelijk aan elkaar. Maar dan weten we van de twee driehoeken, dat BC = EF, dat $\angle B = \angle E$ en dat $\angle A = \angle D$. Ze zijn dus congruent volgens stelling 25.

41



Geval 3:

Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$, AC = DF, BC = EF, $\angle A = \angle D$, $\angle B$ en $\angle E$ zijn beide *stomp*. (fig. 41)

Te bew.: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bewijs: Er is een verplaatsing, waarbij $\triangle DEF$ overgaat in $\triangle D'E'F'$, zódanig, dat E'F' langs BC komt en punt E' in B, terwijl A en D' aan verschillende kanten van BC liggen.

Omdat E'F' = BC zal F' in C komen.

Omdat $\angle B$ en $\angle E$ beide stomp zijn, liggen B en C aan dezelfde kant van AD'.

$D'F' = AC \rightarrow \angle CAD' = \angle CD'A$ (st. 13)

$\angle A = \angle D'$ (geg.) —

$\angle BAD' = \angle BD'A \rightarrow AB = D'E'$. (st. 14)

Maar nu weten we van de twee driehoeken, dat AB = DE, dat BC = EF en dat AC = DF. Ze zijn dus congruent volgens stelling 26.

Een eenvoudiger geval van stelling 27 vinden we terug in de volgende stelling.

Stelling 28: **Als twee rechthoekige driehoeken één rechthoekszijde en de schuine zijde gelijk hebben, dan zijn ze congruent.** Geval Z.Z.R.

Bewijs: Dit volgt uit het feit, dat de twee driehoeken twee zijden gelijk hebben en de hoek tegenover één van die zijden, namelijk de rechte hoek, terwijl de hoek tegenover die andere zijde in beide driehoeken in ieder geval scherp is.

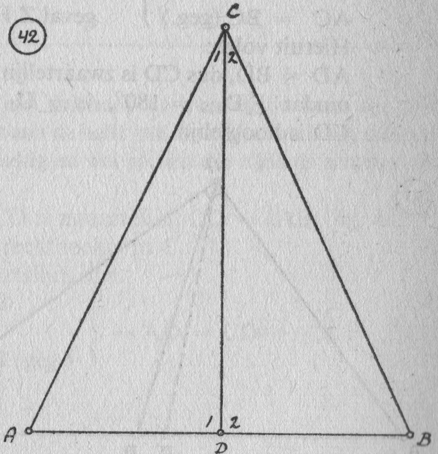
Om te bewijzen, dat twee driehoeken congruent zijn, hebben we blijkbaar drie paar gelijke onafhankelijke elementen nodig. Het voordeel van de congruentie is nu, dat we na het bewijzen van de congruentie mogen concluderen, dat de nog niet genoemde corresponderende elementen van de twee driehoeken ook gelijk zijn, want twee congruente driehoeken hebben alle corresponderende elementen gelijk. We zullen hiervan heel vaak gebruik maken, o.a. bij het bewijzen van de volgende stelling.

Stelling 29: **Als een driehoek gelijkbenig is, dan vallen de hoogtelijn, de zwaartelijn en de bissectrice uit de top samen.**

We onderscheiden drie gevallen:

Geval 1:

42



Gegeven: $\triangle ABC$, $AC = BC$, CD is *hoogtelijn.* (fig. 42)
Te bew.: CD is zwaartelijn, CD is bissectrice.
Bewijs: CD is hoogtelijn (geg.) →

$$\left.\begin{array}{l}\angle D_1 = \angle D_2 = 90^\circ \\ CD = CD \\ AC = BC \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \triangle ADC \cong \triangle BDC \text{ geval Z.Z.R.}$$

Hieruit volgt:
$AD = BD$, dus CD is zwaartelijn en
$\angle C_1 = \angle C_2$, dus CD is bissectrice.

Geval 2:
Gegeven: $\triangle ABC$, $AC = BC$, CD is *zwaartelijn.* (fig. 42)
Te bew.: CD is hoogtelijn, CD is bissectrice.
Bewijs: CD is zwaartelijn (geg.) →

$$\left.\begin{array}{l}AD = DB \\ CD = CD \\ AC = BC \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \triangle ADC \cong \triangle BDC. \text{ geval Z.Z.Z.}$$

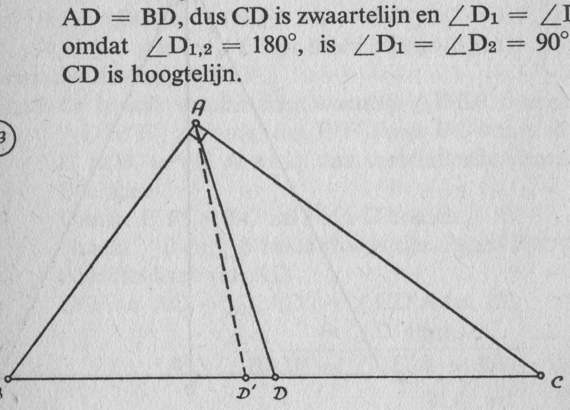
Hieruit volgt:
$\angle C_1 = \angle C_2$, dus CD is bissectrice en $\angle D_1 = \angle D_2$, en omdat $\angle D_{1,2} = 180^\circ$, is $\angle D_1 = \angle D_2 = 90^\circ$, dus CD is hoogtelijn.

Geval 3:
Gegeven: $\triangle ABC$, $AC = BC$, CD is *bissectrice.* (fig. 42)
Te bew.: CD is zwaartelijn, CD is hoogtelijn.
Bewijs: CD is bissectrice (geg.) →

$$\left.\begin{array}{l}\angle C_1 = \angle C_2 \\ CD = CD \\ AC = BC \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \triangle ADC \cong \triangle BDC. \text{ geval Z.H.Z.}$$

Hieruit volgt:
$AD = BD$, dus CD is zwaartelijn en $\angle D_1 = \angle D_2$, en omdat $\angle D_{1,2} = 180^\circ$, is $\angle D_1 = \angle D_2 = 90^\circ$, dus CD is hoogtelijn.

43



Stelling 30: **Als een driehoek rechthoekig is, dan is de zwaartelijn naar de schuine zijde gelijk aan de helft van de schuine zijde.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $\angle A = 90°$, AD is zwaartelijn. (fig. 43)

Te bew.: $AD = \frac{1}{2}BC$.

Bewijs: AD is zwaartelijn, dus D is het midden van BC. Trek het lijnstuk AD′ zódanig, dat $\angle BAD' = \angle B$.

$\angle A = 90° \rightarrow \angle B + \angle C = 90° \rightarrow$

$\angle A \quad = \angle B + \angle C$

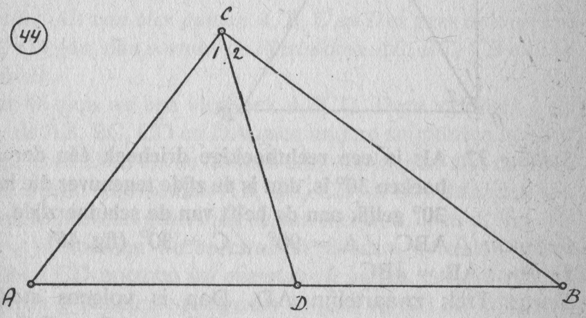
$\angle BAD' = \angle B$ $\quad -$

$\angle D'AC = \angle C \rightarrow D'A = D'C$ (st. 14)

$\angle BAD' = \angle B \rightarrow D'A = D'B$ (st. 14) $\Big\} \rightarrow$

$\rightarrow D'C = D'B.$

Dus D′ is het midden van BC en valt dus samen met D. Maar dan is AD = DB en AD = DC, dus $AD = \frac{1}{2}BC$.



Stelling 31: **Als in een driehoek de zwaartelijn naar een zijde gelijk is aan de helft van die zijde, dan is die driehoek rechthoekig en wel zo, dat die zijde de schuine zijde is.**

Gegeven: $\triangle ABC$, CD is zwaartelijn, $CD = \frac{1}{2}AB$. (fig. 44)

Te bew.: $\triangle ABC$ is rechthoekig in C.

Bewijs: CD is zwaartelijn, dus

$AD = \frac{1}{2}AB$

$CD = \frac{1}{2}AB$ (geg.) $\Big\} \rightarrow AD = CD \rightarrow \angle A = \angle C_1$ (st. 13)

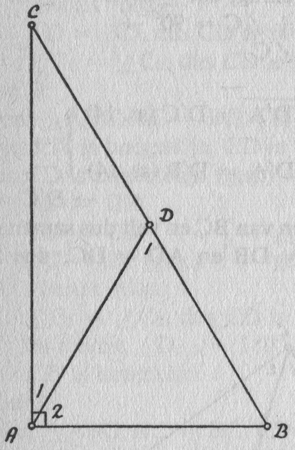
en evenzo:

$$\left.\begin{array}{l} BD = \frac{1}{2}AB \\ CD = \frac{1}{2}AB \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow BD = CD \rightarrow \angle B = \angle C_2 \quad \text{(st. 13)}$$

$$\angle A + \angle B = \angle C_{1,2}. +$$

Omdat $\angle A + \angle B + \angle C_{1,2} = 180°$, is dus $\angle A + \angle B = \angle C_{1,2} = 90°$. $\triangle ABC$ is dus rechthoekig in C.

(45)



Stelling 32: **Als in een rechthoekige driehoek één der scherpe hoeken 30° is, dan is de zijde tegenover die hoek van 30° gelijk aan de helft van de schuine zijde.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $\angle A = 90°$, $\angle C = 30°$. (fig. 45)

Te bew.: $AB = \frac{1}{2}BC$.

Bewijs: Trek zwaartelijn AD. Dan is volgens stelling 30 $AD = \frac{1}{2}BC$, dus $AD = DB$ en $AD = DC$. Omdat $AD = CD$ is $\angle A_1 = \angle C$ (st. 14), dus $\angle A_1 = 30°$.

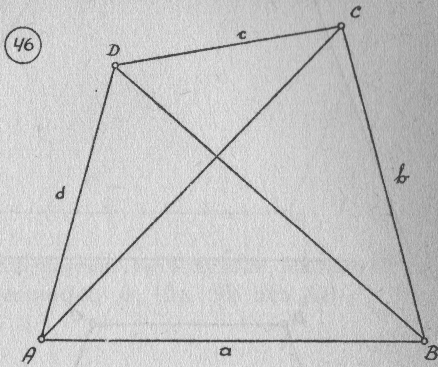
$$\left.\begin{array}{l} \angle A_2 = 90° - \angle A_1 = 60° \\ \angle B \;\; = 90° - \angle C \;\; = 60° \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \angle D_1 = 180° - 60° - 60° = 60°.$$

Hieruit volgt, dat $\triangle ABD$ gelijkzijdig is, dus dat $AB = AD = DB$. Omdat $AD = \frac{1}{2}BC$ is dus ook $AB = \frac{1}{2}BC$.

IV. DE VIERHOEK

A. ALGEMEEN



Definitie: Als van vier punten A, B, C en D er geen drie op een rechte lijn liggen, dan vormen de lijnstukken AB, BC, CD en DA een vierhoek.

In figuur 46 zien we een vierhoek ABCD. Deze vierhoek heet convex, als AB, BC, CD en DA geen andere snijpunten hebben dan A, B, C en D en als de hoeken alle vier kleiner zijn dan een gestrekte hoek. We noemen AB, BC, CD en DA de *zijden* van de vierhoek. Meestal geeft men ze aan met a, b, c, en d. (fig. 46) ∠A en ∠C noemen we *overstaande hoeken*, evenals ∠B en ∠D. AB en CD noemen we *overstaande zijden*, evenals AD en BC. ∠A en ∠B heten *opvolgende hoeken* en AB en BC heten *opvolgende zijden*.

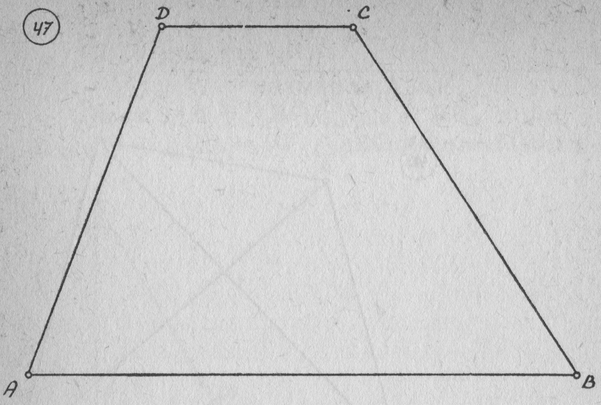
Definitie: Een diagonaal is een lijnstuk, dat twee niet opvolgende hoekpunten van een vierhoek verbindt. Deze zelfde definitie blijft gelden, als we met een veelhoek te doen hebben.

Definitie: Een trapezium is een vierhoek, waarvan twee overstaande zijden evenwijdig lopen en de andere twee niet. (fig. 47) We noemen AB en CD de *evenwijdige zijden*. De twee andere zijden heten de *opstaande zijden*.

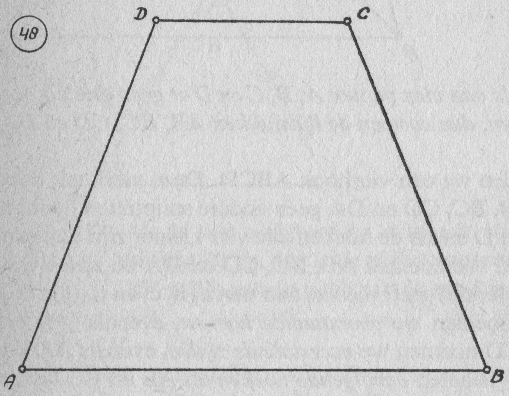
Definitie: Een gelijkbenig trapezium is een trapezium, waarvan de opstaande zijden gelijk zijn (fig. 48), dus AD = BC.

Definitie: Een rechthoekig trapezium is een trapezium, waarvan één opstaande zijde loodrecht op één van de evenwijdige zijden staat. (fig. 49)

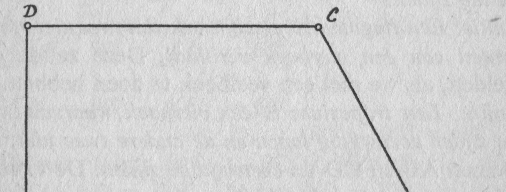
47



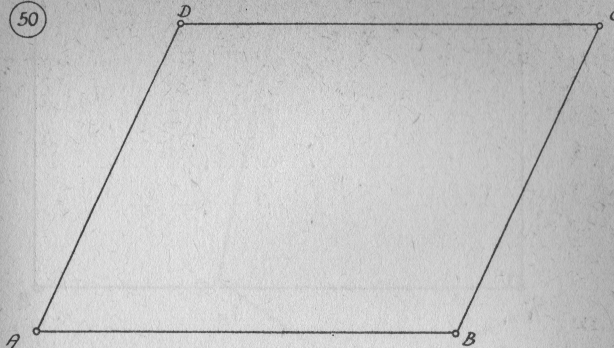
48



49

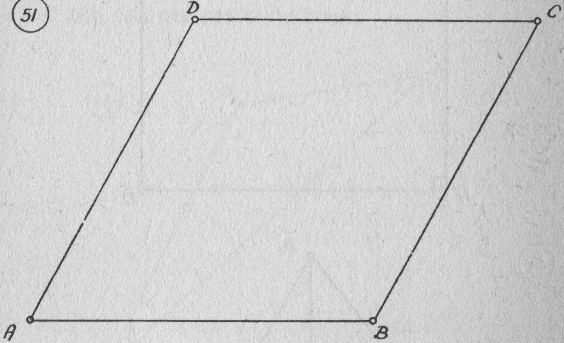


(50)



Definitie: Een parallellogram is een vierhoek, waarvan elk paar overstaande zijden evenwijdig is. (fig. 50) dus AB // CD en AD // BC.

(51)



Definitie: Een ruit is een parallellogram, waarvan twee opvolgende zijden gelijk zijn. (fig. 51)

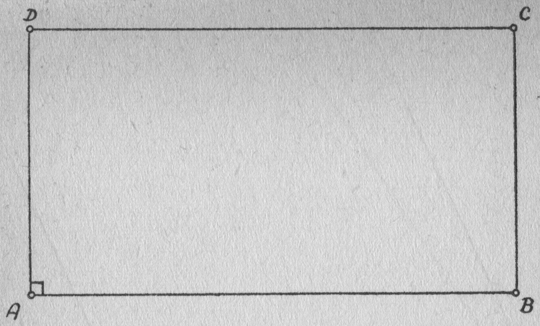
Definitie: Een rechthoek is een parallellogram, waarvan één hoek recht is. (fig. 52)

Definitie: Een vierkant is een ruit, waarvan één hoek recht is. (fig. 53)

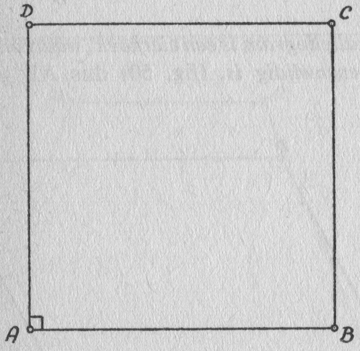
Een vierhoek waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan, wordt wel *vlieger* genoemd. (fig. 54)

Definitie: Een veelhoek is een figuur, gevormd door een aantal punten waarvan er geen drie op een rechte lijn liggen, en die in een bepaalde volgorde door lijnstukken verbonden zijn, terwijl het laatste punt weer met het eerste verbonden is.

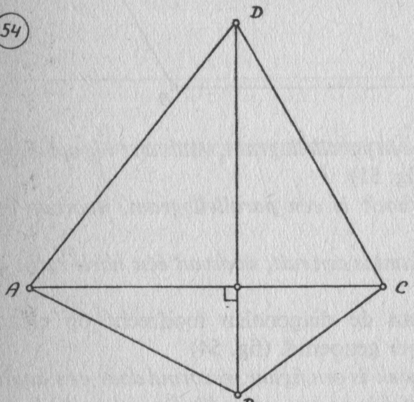
52



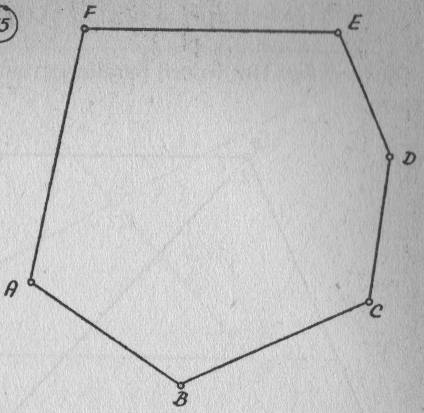
53



54

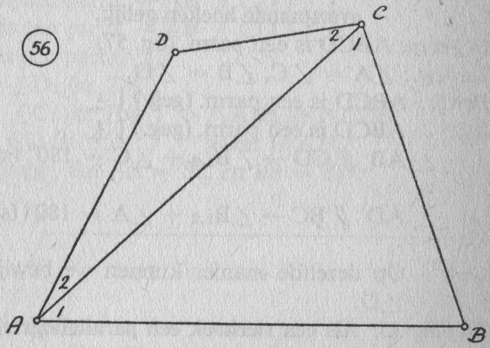


55



We noemen deze vierhoek *convex* (fig. 55), als deze lijnstukken geen andere snijpunten hebben dan de hoekpunten en als alle hoeken kleiner zijn dan een gestrekte hoek.

56



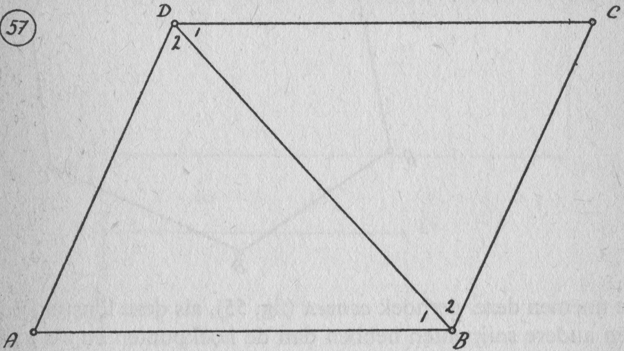
Stelling 33: **De hoeken van een vierhoek zijn samen 360°.**
Gegeven: Vierhoek ABCD. (fig. 56)
Te bew.: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.
Bewijs: Trek diagonaal AC.

In $\triangle ABC$ is $\angle A_1 + \angle B + \angle C_1 = 180°$ (st. 11)
en in $\triangle ADC$ is $\angle A_2 + \angle D + \angle C_2 = 180°$ (st. 11) +

$\angle A_{1,2} + \angle B + \angle C_{1,2} + \angle D = 360°$, of
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

Opmerking: Het woord parallellogram korten we wel af tot parm.

57



Stelling 34: **Als een vierhoek een parallellogram is, dan zijn de overstaande hoeken gelijk.**

Gegeven: ABCD is een parm. (fig. 57)

Te bew.: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

Bewijs: ABCD is een parm. (geg.) $\xrightarrow{1}$
ABCD is een parm. (geg.) $\xrightarrow{2}$

$\xrightarrow{1}$ AB // CD $\rightarrow \angle B_{1,2} + \angle C = 180°$ (st. 7d)
$\xrightarrow{2}$ AD // BC $\rightarrow \angle B_{1,2} + \angle A = 180°$ (st. 7d) } $\rightarrow$
$\rightarrow \angle A = \angle C$.

Op dezelfde manier kunnen we bewijzen, dat $\angle B = \angle D$.

Stelling 35: **Als een vierhoek een parallellogram is, dan zijn de overstaande zijden gelijk.**

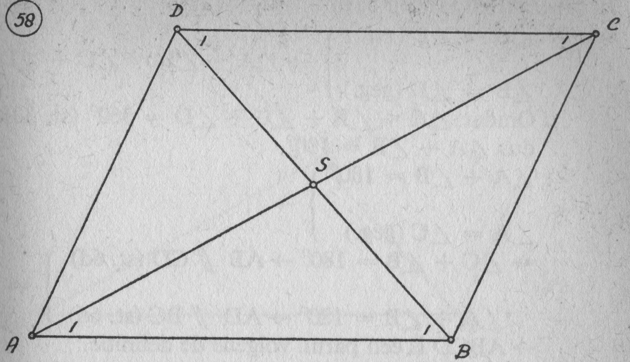
Gegeven: ABCD is een parm. (fig. 57)

Te bew.: AB = CD, AD = BC.

Bewijs: We trekken diagonaal BD. ABCD is een parm., dus
AB // CD $\rightarrow \angle B_1 = \angle D_1$ (st. 7b)
en AD // BC $\rightarrow \angle D_2 = \angle B_2$ (st. 7b)
BD = DB } $\rightarrow$
$\rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CDB$.
geval H.Z.H.

Hieruit volgt, dat AB = CD en dat AD = BC.

58



Stelling 36: **Als een vierhoek een parallellogram is, dan delen de diagonalen elkaar middendoor.**

Gegeven: ABCD is een parm. (fig. 58)

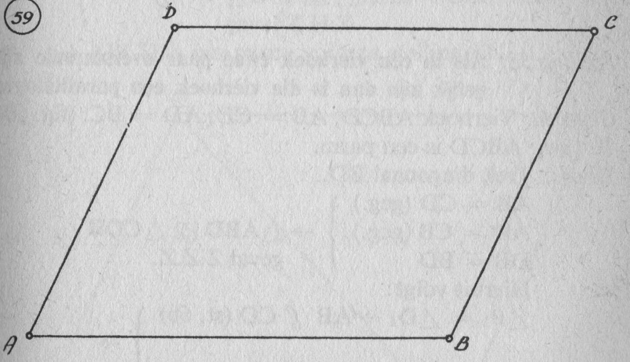
Te bew.: AS = SC, BS = SD.

Bewijs: ABCD is een parm. → AB // CD } $\xrightarrow{1}$
ABCD is een parm. → AB // CD } $\xrightarrow{2}$
ABCD is een parm. $\xrightarrow{3}$

$\xrightarrow{1}$ $\angle B_1 = \angle D_1$ (st. 7b)
$\xrightarrow{2}$ $\angle A_1 = \angle C_1$ (st. 7b) } → $\triangle ABS \cong \triangle CDS$
$\xrightarrow{3}$ AB = CD (st. 35) } geval H.Z.H.

Hieruit volgt, dat AS = SC en BS = SD.

59



Stelling 37: **Als in een vierhoek twee paar overstaande hoeken gelijk zijn dan is die vierhoek een parallellogram.**

Gegeven: Vierhoek ABCD, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. (fig. 59)

Te bew.: ABCD is een parm.

Bewijs: $\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle C \text{ (geg.)} \\ \angle B = \angle D \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle A + \angle B = \angle C + \angle D.$

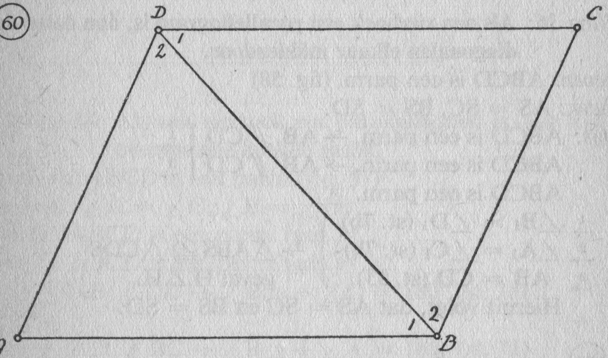
Omdat $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ (st. 33), is dus $\angle A + \angle B = 180°$.

$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle B = 180° \\ \angle A = \angle C \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\rightarrow \angle C + \angle B = 180° \rightarrow AB \,/\!/\, CD \text{ (st. 6d)} \\ \angle A + \angle B = 180° \rightarrow AD \,/\!/\, BC \text{ (st. 6d)}\end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow$ ABCD is een parm. volgens de definitie.

60



Stelling 38: **Als in een vierhoek twee paar overstaande zijden gelijk zijn dan is die vierhoek een parallellogram.**

Gegeven: Vierhoek ABCD, AB = CD, AD = BC. (fig. 60)

Te bew.: ABCD is een parm.

Bewijs: Trek diagonaal BD.

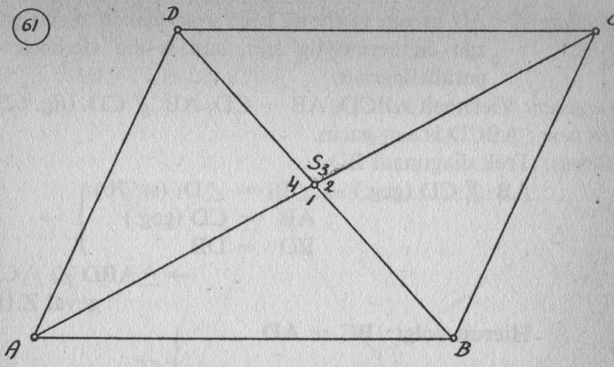
$\left.\begin{array}{l}AB = CD \text{ (geg.)} \\ AD = CB \text{ (geg.)} \\ DB = BD\end{array}\right\} \rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CDB$ geval Z.Z.Z.

Hieruit volgt:

$\left.\begin{array}{l}\angle B_1 = \angle D_1 \rightarrow AB \,/\!/\, CD \text{ (st. 6b)} \\ \angle B_2 = \angle D_2 \rightarrow BC \,/\!/\, AD \text{ (st. 6b)}\end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow$ ABCD is een parm. volgens de definitie.

61



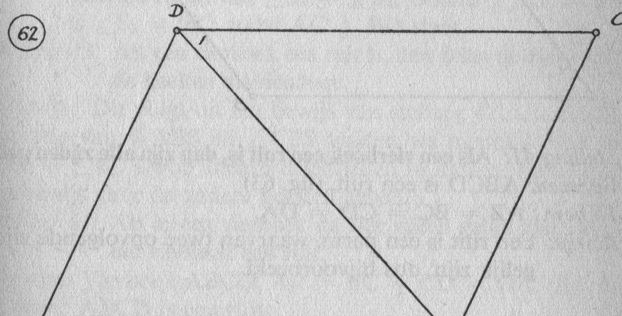
Stelling 39: **Als in een vierhoek de diagonalen elkaar middendoor delen, dan is die vierhoek een parallellogram.**

Gegeven: Vierhoek ABCD, AS = CS, BS = DS. (fig. 61)

Te bew.: ABCD is een parm.

Bewijs: AS = CS (geg.)
BS = DS (geg.)
$\angle S_1 = \angle S_3$ (st. 1) } →
→ $\triangle ABS \cong \triangle CDS$ → AB = CD
geval Z.H.Z.
CS = AS (geg.)
BS = DS (geg.)
$\angle S_2 = \angle S_4$ (st. 1) } →
→ $\triangle BCS \cong \triangle DAS$ → BC = AD
geval Z.H.Z.
} →
→ ABCD is een parm. volgens stelling 38.

62



Stelling 40: **Als in een vierhoek twee overstaande zijden gelijk zijn en evenwijdig zijn, dan is die vierhoek een parallellogram.**
Gegeven: Vierhoek ABCD, AB = CD, AB // CD. (fig. 62)
Te bew.: ABCD is een parm.
Bewijs: Trek diagonaal BD.

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \text{ (geg.)} \rightarrow \angle B_1 = \angle D_1 \text{ (st. 7b)} \\ \qquad\qquad\qquad\quad AB = CD \text{ (geg.)} \\ \qquad\qquad\qquad\quad BD = DB \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow \triangle ABD \cong \triangle CDB$
geval Z.H.Z.

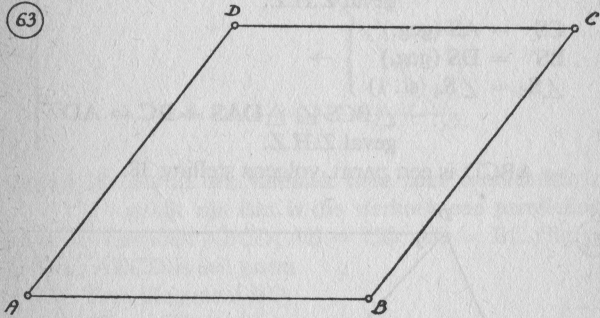
$$\left.\begin{array}{l} \text{Hieruit volgt: } BC = AD \\ \qquad\qquad\qquad AB = CD \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow$ ABCD is een parm. volgens stelling 38.

C. DE RUIT

Opmerking: Uit de definitie van een ruit volgt, dat een ruit alle eigenschappen van een parallellogram heeft.

63



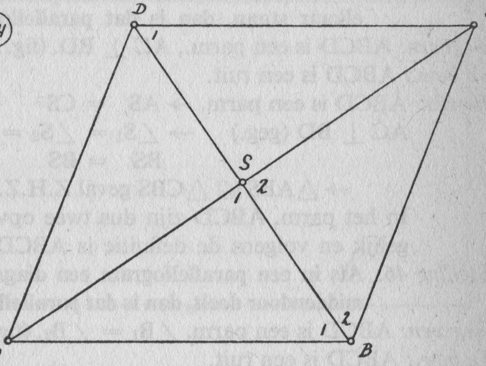
Stelling 41: **Als een vierhoek een ruit is, dan zijn alle zijden gelijk.**
Gegeven: ABCD is een ruit. (fig. 63)
Te bew.: AB = BC = CD = DA.
Bewijs: Een ruit is een parm. waarvan twee opvolgende zijden gelijk zijn, dus bijvoorbeeld

AB = BC } → BC = CD
AB = CD (st. 35) }

BC = CD } →
BC = AD (st. 35) }

→ AB = BC = CD = DA.

64



Stelling 42: **Als een vierhoek een ruit is, dan staan de diagonalen loodrecht op elkaar.**

Gegeven: ABCD is een ruit. (fig. 64)

Te bew.: AC ⊥ BD.

Bewijs: ABCD is een ruit → AS = SC }
AB = CB (st. 41) } →
BS = BS }

→ △ABS ≌ △CBS.
geval Z.Z.Z.

Hieruit volgt, dat $\angle S_1 = \angle S_2$. Omdat $\angle S_{1,2} = 180°$ is $\angle S_1 = 90°$, zodat AC ⊥ BD staat.

Stelling 43: **Als een vierhoek een ruit is, dan delen de diagonalen de hoeken middendoor.**

Bewijs: Dit volgt uit het bewijs van stelling 42. Uit de congruentie van △ABS en △CBS vinden we namelijk ook dat $\angle B_1 = \angle B_2$. Door andere driehoeken te kiezen, kunnen we het bewijs voor de andere hoeken geven.

Stelling 44: **Als in een vierhoek de vier zijden gelijk zijn, dan is die vierhoek een ruit.**

Gegeven: Vierhoek ABCD, AB = BC = CD = DA. (fig. 64)

Te bew.: ABCD is een ruit.

Bewijs: $\left.\begin{array}{l} AB = CD \text{ (geg.)} \\ BC = DA \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow$ ABCD is een parm. (st. 38) $\left.\begin{array}{l} \\ AB = BC \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow$ ABCD is een ruit volgens de definitie.

Stelling 45: **Als in een parallellogram de diagonalen loodrecht op elkaar staan, dan is dat parallellogram een ruit.**

Gegeven: ABCD is een parm., $AC \perp BD$. (fig. 64)

Te bew.: ABCD is een ruit.

Bewijs: $\left.\begin{array}{l} \text{ABCD is een parm.} \rightarrow AS = CS \\ AC \perp BD \text{ (geg.)} \rightarrow \angle S_1 = \angle S_2 = 90^\circ \\ BS = BS \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \triangle ABS \cong \triangle CBS$ geval Z.H.Z. $\rightarrow AB = BC$.

In het parm. ABCD zijn dus twee opvolgende zijden gelijk en volgens de definitie is ABCD dan een ruit.

Stelling 46: **Als in een parallellogram een diagonaal een hoek middendoor deelt, dan is dat parallellogram een ruit.**

Gegeven: ABCD is een parm. $\angle B_1 = \angle B_2$. (fig. 64)

Te bew.: ABCD is een ruit.

Bewijs: ABCD is een parm., dus:

$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \rightarrow \angle B_1 = \angle D_1 \text{ (st. 7b)} \\ \angle B_1 = \angle B_2 \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \angle D_1 = \angle B_2 \rightarrow BC = DC$ (st. 14)

Nu zijn in parm. ABCD dus twee opvolgende zijden gelijk en volgens de definitie is ABCD dan een ruit.

D. DE RECHTHOEK

Opmerking: Uit de definitie van een rechthoek volgt, dat een rechthoek alle eigenschappen van een parallellogram heeft.

Stelling 47: **Als een vierhoek een rechthoek is, dan zijn alle hoeken 90°.**

Gegeven: ABCD is een rechthoek. (fig. 65)

Te bew.: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$.

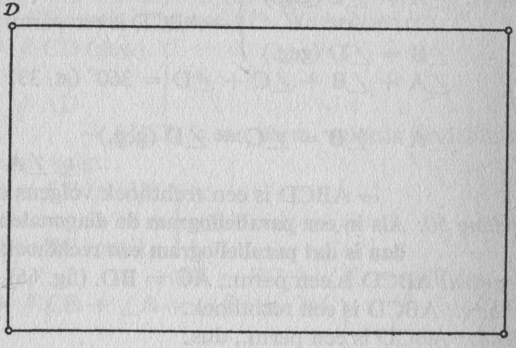
Bewijs: Een rechthoek is een parm., waarvan één hoek recht is (def.) dus bijv:

$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle A = 90^\circ \\ \angle A = \angle C \text{ (st. 34)} \end{array}\right\} \rightarrow \angle A = \angle C = 90^\circ \\ AD \parallel BC \text{ (def. parm.)} \rightarrow \angle A + \angle B = 180^\circ \text{ (st. 7d)} \end{array}\right\} \rightarrow$

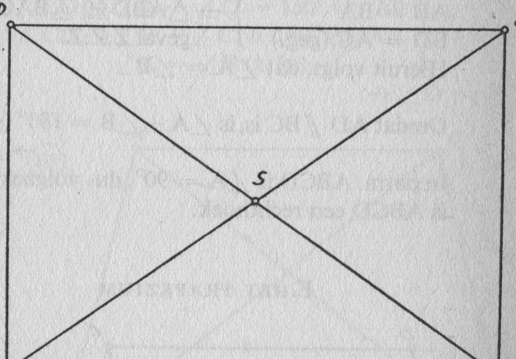
$\rightarrow \angle B = 90°$
$\angle B = \angle D$ (st. 34)
$\rightarrow \angle D = 90°$.

Dus $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$.

(65)



(66)



Stelling 48: **Als een vierhoek een rechthoek is, dan zijn de diagonalen gelijk.**

Gegeven: ABCD is een rechthoek. (fig. 66)

Te bew.: AC = DB.

Bewijs: ABCD is een rechthoek, dus:

AD = BC
AB = BA
$\angle A = \angle B = 90°$ (st. 47)
$\rightarrow$

$\rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ABC$, geval Z.H.Z. $\rightarrow$ BD = AC.

Stelling 49: **Als in een vierhoek de vier hoeken gelijk zijn, dan is die vierhoek een rechthoek.**

Gegeven: Vierhoek ABCD, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$. (fig. 65)

Te bew.: ABCD is een rechthoek.

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle C \text{ (geg.)}\\ \angle B = \angle D \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \text{ABCD is een parm. (st. 37)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ \text{ (st. 33)}\\ \angle A = \angle B = \angle C = \angle D \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \overset{1}{\rightarrow}$$

$$\overset{1}{\rightarrow} \angle A = 90^\circ$$

$\rightarrow$ ABCD is een rechthoek volgens de definitie.

Stelling 50: **Als in een parallellogram de diagonalen gelijk zijn, dan is dat parallellogram een rechthoek.**

Gegeven: ABCD is een parm., AC = BD. (fig. 66)

Te bew.: ABCD is een rechthoek.

Bewijs: ABCD is een parm., dus:

$$\left.\begin{array}{l}AD = BC \text{ (st. 35)}\\ AB = BA\\ BD = AC \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \triangle ABD \cong \triangle BAC. \text{ geval Z.Z.Z.}$$

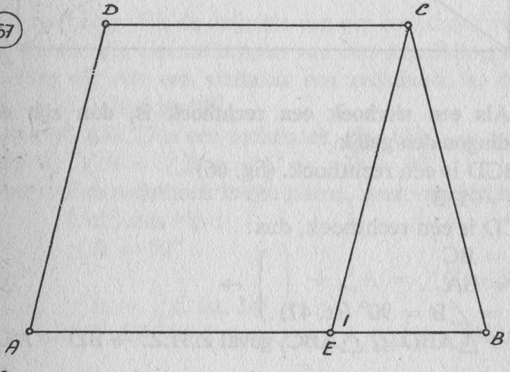
$$\left.\begin{array}{l}\text{Hieruit volgt, dat } \angle A = \angle B\\ \text{Omdat } AD \,/\!/\, BC \text{ is, is } \angle A + \angle B = 180^\circ \text{ (st. 7d)}\end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow \angle A = 90^\circ$.

In parm. ABCD is $\angle A = 90^\circ$, dus volgens de definitie is ABCD een rechthoek.

E. HET TRAPEZIUM

(67)



Stelling 51: **Als een trapezium gelijkbenig is, dan zijn de twee hoeken, die aan één der twee evenwijdige zijden grenzen, gelijk en de twee andere hoeken ook.**

Gegeven: ABCD is een trapezium, AB // CD, AD = BC. (fig. 67)

Te bew.: $\angle A = \angle B$ en $\angle C = \angle D$.

Bewijs: Trek CE evenwijdig met AD. We hebben nu:

AB // CD (geg.) }
CE // AD } →
→ AECD is een parm. volgens de definitie.

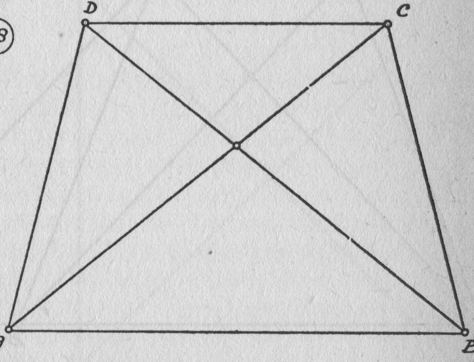
Hieruit volgt:

AD = CE (st. 35) }
AD = BC (geg.) } →
→ CE = BC → $\angle E_1 = \angle B$. (st. 13)

AD // CE → $\angle A = \angle E_1$ (st. 7a) }
$\angle B = \angle E_1$ (z. b.) } → $\angle A = \angle B$.

AB // CD → $\angle A + \angle D = 180°$ (st. 7d) }
AB // CD → $\angle B + \angle C = 180°$ (st. 7d) } →
$\angle A = \angle B$ (z. b.) }
→ $\angle D = \angle C$.

(68)



Stelling 52: **Als een trapezium gelijkbenig is, dan zijn de diagonalen gelijk.**

Gegeven: ABCD is een trapezium, AB // CD, AD is BC. (fig. 68)

Te bew.: AC = BD.

Bewijs: $AD = BC \text{ (geg.)} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \angle A = \angle B \text{ (st. 51)} \\ AD = BC \text{ (geg.)} \\ AB = BA \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \triangle ABD \cong \triangle BAC \rightarrow BD = AC.$
geval Z.H.Z.

Stelling 53: **Als in een trapezium twee hoeken, die aan één der twee evenwijdige zijden grenzen, gelijk zijn, dan is dat trapezium gelijkbenig.**

Gegeven: ABCD is een trapezium, AB // CD, $\angle A = \angle B$. (fig. 67)

Te bew.: AD = BC.

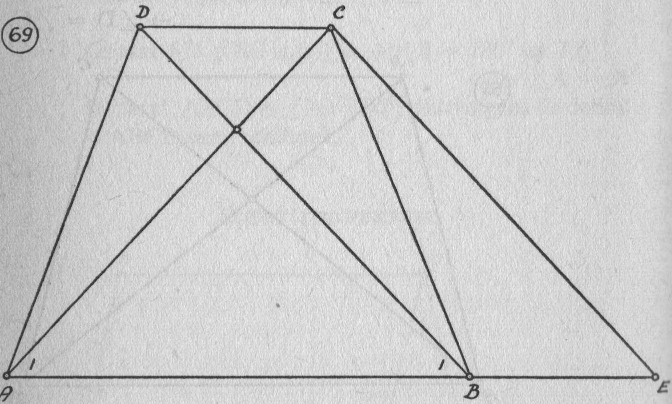
Bewijs: Trek CE evenwijdig met AD. We hebben nu:

$\left.\begin{array}{l} CE \,//\, AD \rightarrow \angle A = \angle E_1 \text{ (st. 7a)} \\ \angle A = \angle B \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \angle E_1 = \angle B \rightarrow EC = BC \text{ (st. 14)} \\ \left.\begin{array}{l} AB \,//\, DC \text{ (geg.)} \\ CE \,//\, AD \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow AECD \text{ is een parm. (def.)} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{1} EC = AD \text{ (st. 35)} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow BC = AD.$

69



Stelling 54: **Als in een trapezium de diagonalen gelijk zijn, dan is dat trapezium gelijkbenig.**

Gegeven: ABCD is een trapezium, AB // CD, AC = BD. (fig. 69)

Te bew.: AD = BC.

Bewijs: Trek CE evenwijdig met DB. We hebben nu:

$AB \parallel CD$ (geg.)
$CE \parallel DB$ (z.b.) } $\rightarrow$
$\rightarrow$ BECD is een parm. (def.) $\rightarrow BD = EC$ (st. 35)

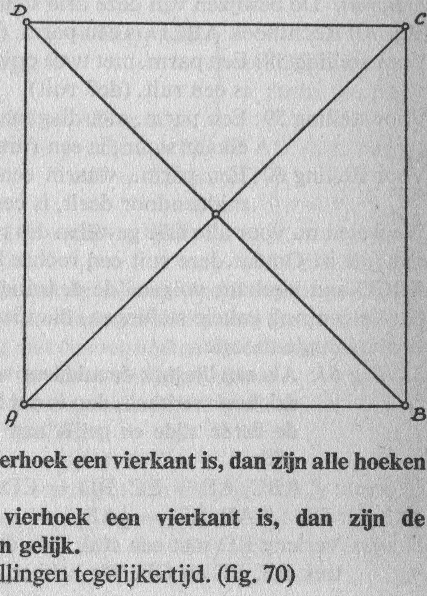
$BD = EC$ (z.b.)
$BD = AC$ (geg.) } $\rightarrow$
$\rightarrow AC = EC \rightarrow \angle A_1 = \angle E$ (st. 13)
$BD \parallel EC$ (z.b.) $\rightarrow \angle B_1 = \angle E$ (st. 7a) } $\rightarrow$
$\rightarrow \angle A_1 = \angle B_1$

$\angle A_1 = \angle B_1$ (z.b.)
$AB = BA$
$AC = BD$ (geg.) } $\rightarrow \triangle ABC \cong \triangle BAD$
geval Z.H.Z. $\rightarrow BC = AD$.

F. HET VIERKANT

Opmerking: Uit de definitie van een vierkant volgt, dat een vierkant alle eigenschappen van een ruit heeft, dus ook van een parallellogram.

70



Stelling 55: **Als een vierhoek een vierkant is, dan zijn alle hoeken 90°.**

Stelling 56: **Als een vierhoek een vierkant is, dan zijn de diagonalen gelijk.**

We bewijzen beide stellingen tegelijkertijd. (fig. 70)

Bewijs: Een vierkant is een ruit, waarvan één hoek recht is (def.). Maar een ruit is een parm. (def.), dus een vierkant is een parm., waarvan een hoek recht is. Volgens de definitie van rechthoek is dus ieder vierkant een rechthoek en heeft dus ieder vierkant de eigenschappen van een rechthoek.
Volgens stelling 47 zijn dus alle hoeken van een vierkant 90°.
Volgens stelling 48 zijn de diagonalen gelijk.

Stelling 57: **Als in een ruit de diagonalen gelijk zijn, dan is die ruit een vierkant.**

Gegeven: ABCD is een ruit, AC = BD. (fig. 70)
Te bew.: ABCD is een vierkant.
Bewijs: Een ruit is een parm. (def.). Omdat AC = BD is, is dit parm. een rechthoek (st. 50). Dus $\angle A = 90°$ (st. 47). Ruit ABCD heeft dan een rechte hoek en is dus een vierkant volgens de definitie van vierkant.

Stelling 58: **Als in een rechthoek twee opvolgende zijden gelijk zijn, dan is die rechthoek een vierkant.**

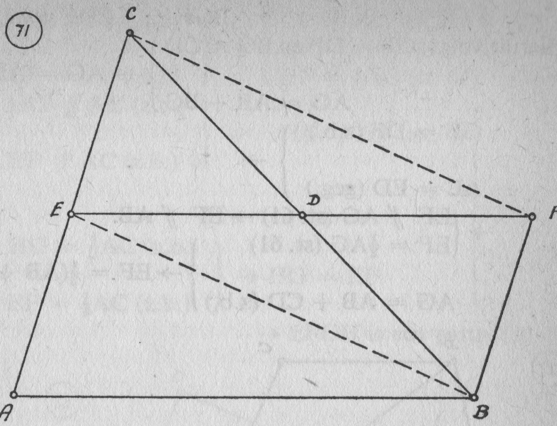
Stelling 59: **Als in een rechthoek de diagonalen loodrecht op elkaar staan, dan is die rechthoek een vierkant.**

Stelling 60: **Als in een rechthoek een diagonaal een hoek middendoor deelt, dan is die rechthoek een vierkant.**

Bewijs: De bewijzen van deze drie stellingen lopen analoog. (fig. 70) Rechthoek ABCD is een parm. (def. rechthk.).
Voor stelling 58: Een parm. met twee opvolgende gelijke zijden is een ruit. (def. ruit).
Voor stelling 59: Een parm. met diagonalen, die loodrecht op elkaar staan, is een ruit. (st. 45)
Voor stelling 60: Een parm., waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt, is een ruit. (st. 46)
We weten nu voor alle drie gevallen dat rechthoek ABCD ook een ruit is. Omdat deze ruit een rechte hoek heeft (st. 47), is ABCD een vierkant volgens de definitie van vierkant.
Nu volgen nog enkele stellingen, die toepassingen zijn van de voorafgaande theorie.

Stelling 61: **Als een lijnstuk de middens van twee zijden van een driehoek verbindt, dan is dat lijnstuk evenwijdig met de derde zijde en gelijk aan de helft van de derde zijde.**

Gegeven: $\triangle$ABC, AE = EC, BD = CD. (fig. 71)
Te bew.: ED // AB, ED = $\frac{1}{2}$AB.
Bewijs: Verleng ED met een stuk DF, dat gelijk is aan ED en trek BF, BE en CF. We hebben nu:



BD = CD (geg.) }
ED = FD (z.b.) } →

→ EBFC is een parm. (st. 39) → BF // CE (def.)
→ BF = CE (st. 35)

BF = CE (z.b.) }
AE = CE (geg.) } → BF = AE }
BF // CE → BF // AE (z.b.) } → ABFE is een parm. (st. 40)

Hieruit volgt: EF // AB, dus ED // AB. (def. parm.)

En: AB = EF (st. 35) }
ED = DF (z.b.) → ED = ½EF } →
→ ED = ½AB.

Stelling 62: **Als een lijnstuk de middens van de opstaande zijden van een trapezium verbindt, dan is dat lijnstuk evenwijdig met de evenwijdige zijden en gelijk aan de halve som van de evenwijdige zijden.**

Gegeven: ABCD is een trapezium, AB // CD, AE = ED, BF = FC. (fig. 72)

Te bew.: EF //AB, EF = ½(AB + CD).

Bewijs: Trek DF en het verlengde van DF, dat AB in G snijdt.

AB // CD (geg.) → $\angle B_2 = \angle C$ (st. 7b) }
BF = CF (geg.) } →
$\angle F_1 = \angle F_2$ (st. 1) }

$\rightarrow \triangle BGF \cong \triangle CDF$ geval H.Z.H.

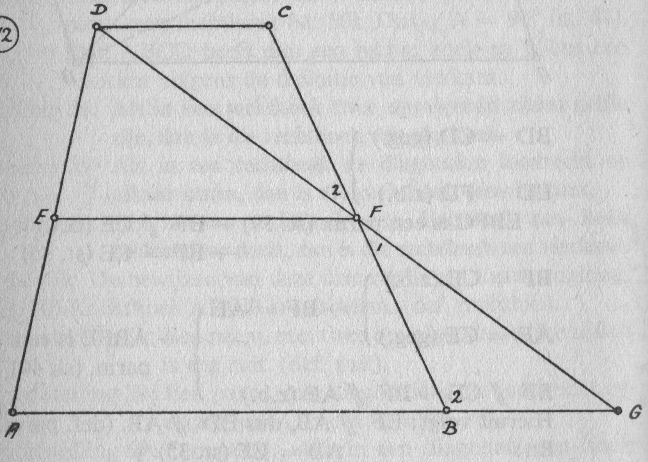
$$\left.\begin{array}{l}\text{Hieruit volgt: } GF = DF \text{ en } BG = CD \\ AG = AB + BG\end{array}\right\} \rightarrow AG = AB + CD$$

$$\left.\begin{array}{l}GF = DF \text{ (z.b.)} \\ AE = ED \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases}EF \,/\!/\, AG \text{ (st. 61)} \rightarrow EF \,/\!/\, AB. \\ EF = \tfrac{1}{2}AG \text{ (st. 61)}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}EF = \tfrac{1}{2}AG \text{ (st. 61)} \\ AG = AB + CD \text{ (z.b.)}\end{array}\right\} \rightarrow EF = \tfrac{1}{2}(AB + CD).$$

(72)



Opmerking: Het lijnstuk dat de middens van twee zijden van een driehoek verbindt, noemen we wel een *middenparallel* van die driehoek. Het lijnstuk dat de middens van de opstaande zijden van een trapezium verbindt, noemen we wel de *middenparallel* van dat trapezium.

Stelling 63: **Als vier lijnstukken de middens van telkens twee opvolgende zijden van een vierhoek verbinden, dan vormen die lijnstukken een parallellogram.**

Gegeven: Vierhoek ABCD, AE = EB, BF = FC, CG = GD, DH = HA. (fig. 73)

Te bew.: EFGH is een parm.

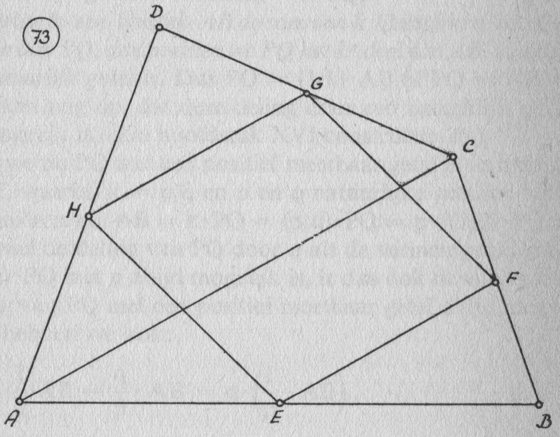
Bewijs:
$$\left.\begin{array}{l}DH = HA \text{ (geg.)} \\ DG = CG \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases}HG = \tfrac{1}{2}AC \text{ (st. 61)} \\ HG \,/\!/\, AC \text{ (st. 61)}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} AE = EB \text{ (geg.)} \\ CF = FB \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} EF \parallel AC \text{ (st. 61)} \\ EF = \tfrac{1}{2}AC \text{ (st. 61)} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} HG \parallel AC \text{ (z.b.)} \\ EF \parallel AC \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow HG \parallel EF \text{ (ax. 4)} \\ \\ \left.\begin{array}{l} HG = \tfrac{1}{2}AC \text{ (z.b.)} \\ EF = \tfrac{1}{2}AC \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow HG = EF \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow EFGH \text{ is een parm. (st. 40)}$$

73



Opmerking: We zijn bij het definiëren van ruit en rechthoek uitgegaan van een parallellogram. Het is ook mogelijk om de ruit te definiëren als een vierhoek, waarvan de vier zijden gelijk zijn. In dat geval zouden we stelling 44 kunnen laten vervallen en bovendien zouden de bewijzen van enige van de stellingen, die over een ruit handelen, een wijziging moeten ondergaan. Ditzelfde verschijnsel zou zich bij de rechthoek voordoen, als we de rechthoek gedefinieerd hadden als een vierhoek met gelijke hoeken, of als een vierhoek met drie rechte hoeken. Ook van het vierkant kunnen we diverse definities geven:

1. Een vierhoek met gelijke zijden en gelijke hoeken.
2. Een parm. met een rechte hoek en twee opvolgende gelijke zijden.

3. Een ruit met een rechte hoek.
4. Een rechthoek met twee opvolgende gelijke zijden.

In dit boek is de derde definitie gebruikt. Bij toepassing van één van de andere definities zouden weer verschillende bewijzen gewijzigd en verschillende stellingen toegevoegd of weggelaten moeten worden.

V. VERHOUDINGEN EN EVENREDIGHEDEN

In hoofdstuk II hebben we gezien wat we onder de som en het verschil van twee lijnstukken verstaan. Ook kwam daar al even ter sprake wat we bedoelen met het tweevoud of het drievoud van een lijnstuk. We zullen hier nu iets dieper op ingaan en spreken nu eerst af, wat we verstaan onder het vermenigvuldigen van een lijnstuk met een natuurlijk getal k en het delen van een lijnstuk door een natuurlijk getal k.

Definitie: Is een lijnstuk AB de som van k lijnstukken, die alle gelijk zijn aan PQ, dan noemen we AB het k-voud van PQ, waarbij k een natuurlijk getal is. Dus $AB = k \cdot PQ$.

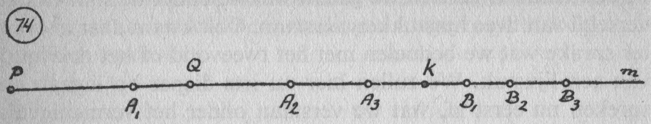
Definitie: Is een lijnstuk AB de som van k lijnstukken, die alle gelijk zijn aan PQ, dan noemen we PQ het k^e deel van AB, waarbij k een natuurlijk getal is. Dus $PQ = (1/k) \cdot AB$ of $PQ = AB/k$. We merken nog op, dat deze deling door een natuurlijk getal altijd mogelijk is. (Zie hoofdstuk XVI constructie 26.)
Moeten we nu PQ met een positief meetbaar getal k vermenigvuldigen, waarbij $k = p/q$ en p en q natuurlijke getallen zijn, dan definiëren we: $AB = k \cdot PQ = (p/q) \cdot PQ = p \cdot [(1/q) \cdot PQ)]$. Daar zowel de deling van PQ door q als de vermenigvuldiging van $(1/q) \cdot PQ$ met p altijd mogelijk is, is dus ook de vermenigvuldiging van PQ met een positief meetbaar getal altijd mogelijk. Zo hebben we ook:

$$PQ = \frac{1}{k} \cdot AB = \frac{q}{p} \cdot AB = q \cdot \left(\frac{1}{p} \cdot AB\right).$$

Om dezelfde reden als hierboven is ook deze bewerking altijd mogelijk.

We gaan nu het lijnstuk PQ vermenigvuldigen met een onmeetbaar getal k. Uit de algebra is bekend, dat het onmeetbare getal k bepaald is door een onmeetbare snede in het gebied van de positieve meetbare getallen en wel zodanig, dat deze positieve meetbare getallen in twee groepen verdeeld worden, namelijk een *lage* en een *hoge klasse*. Voor deze klassen geldt:
1. Ieder van de twee klassen bevat minstens één getal (meetbaar).
2. Ieder positief meetbaar getal ligt juist in één van de twee
3. Ieder getal van de lage klasse is kleiner dan ieder getal van de hoge klasse.

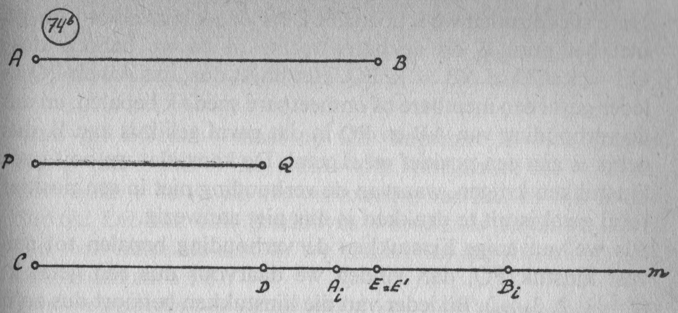
Voor het onmeetbare getal k geldt nu, dat het kleiner is dan ieder getal van de hoge klasse en groter dan ieder getal van de lage klasse. We nemen nu een lijnstuk PQ op een halve rechte



m met beginpunt P (fig. 74a). We vermenigvuldigen PQ vanuit P met al de (meetbare) getallen van de lage klasse en vinden de punten $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Daarna vermenigvuldigen we PQ eveneens vanuit P met al de (meetbare) getallen van de hoge klasse en vinden de punten $B_1, B_2, \ldots, B_n$. In hoofdstuk II is al gebleken, dat de relaties 'groter dan' en 'kleiner dan' op gelijke wijze gelden voor lijnstukken en de bijbehorende maatgetallen. We mogen hier dus zeggen, dat op de halve rechte m twee klassen van punten liggen, namelijk de punten A_i van de lage klasse en de punten B_i van de hoge klasse, waarvoor geldt:
Er is minstens één punt A_i in de lage klasse en er is minstens één punt B_i in de hoge klasse.
Ieder punt A_i van de lage klasse ligt tussen P en ieder punt B_i van de hoge klasse.
Volgens axioma 9 is er nu juist één punt K zó, dat alle punten tussen P en K tot de lage klasse en alle punten van het verlengde van PK tot de hoge klasse behoren.
We definiëren nu: $PK = k \cdot PQ$ en ook $PQ = (1/k) \cdot PK$.
We hebben nu dus de vermenigvuldiging van een lijnstuk PQ met een getal k gedefinieerd en eveneens de deling van een lijnstuk PQ door een getal k, en wel voor verschillende gevallen, namelijk:

k is een natuurlijk getal
k is een meetbaar positief getal } → k is een reëel getal.
k is een onmeetbaar getal

Definitie: Onder de verhouding van twee lijnstukken AB en PQ verstaan we het getal k, waarvoor geldt, dat $AB = k \cdot PQ$.
Hierin kan k dus een natuurlijk getal, of een meetbaar getal, of een onmeetbaar getal zijn, dus een reëel getal. Wel moet k positief zijn.
We gaan nu uit van twee willekeurige lijnstukken AB en PQ en onderzoeken, of deze altijd een verhouding hebben. Daartoe passen we ze af op een halve rechte m met beginpunt C en wel



vanuit C, zodat PQ = CD en AB = CE (fig. 74b). Nu vermenigvuldigen we CD vanuit C met alle positieve meetbare getallen, d.w.z. als a_1 zo'n getal is, dan bepalen we het punt A_1 op m, zodanig, dat $CA_1 = a_1 \cdot CD$. Door deze vermenigvuldiging met alle positieve meetbare getallen krijgen we op m twee groepen van punten, die we A_i ($i = 1, 2, 3 \ldots$) noemen, voorzover ze tussen C en E liggen en die we B_i noemen, voorzover ze op het verlengde van CE liggen. De punten A_i zijn ontstaan uit de vermenigvuldiging $CA_i = a_i \cdot CD$ en de punten B_i zijn ontstaan uit $CB_i = b_i \cdot CD$ ($i = 1, 2, 3 \ldots$). De getallen a_i en b_i vormen bij elkaar al de positieve meetbare getallen. We zullen nu eerst de punten A_i en B_i bekijken en daarna de getallen a_i en b_i.

Omdat ieder van de punten A_i gelegen is tussen C en ieder van de punten B_i kunnen we spreken van twee klassen van punten, n.l. de lage klasse, die de punten A_i bevat en de hoge klasse, die de punten B_i bevat. Deze klassen voldoen aan de in axioma 9 genoemde voorwaarden en er is dus juist een punt E′, waarvoor geldt, dat alle punten A_i van de lage klasse liggen tussen C en E′ en alle punten B_i van de hoge klasse op het verlengde van CE′ liggen. Daar E ook aan deze voorwaarde voldoet, vallen de punten E en E′ samen.

Voor de getallen a_i en b_i geldt, dat ze samen alle positieve meetbare getallen omvatten, terwijl alle getallen a_i kleiner zijn dan ieder van de getallen b_i. De getallen a_i vormen dus een lage klasse en de getallen b_i een hoge klasse in het gebied der positieve meetbare getallen. Daar beide klassen voldoen aan de voorwaarden voor het bepalen van een snede, kunnen we zeggen, dat de getallen a_i en b_i een meetbare of onmeetbare snede bepalen in het gebied der positieve meetbare getallen.

Deze snede zullen we k noemen. De snede k correspondeert nu met het punt E op de halve rechte m en we hebben dus: $CE = k \cdot CD$ of $AB = k \cdot PQ$. Het blijkt dus, dat AB en PQ in ieder geval een meetbare of onmeetbare snede k bepalen, en dat de verhouding van AB en PQ in dat geval gelijk is aan k, dus gelijk is aan een positief reëel getal. De kans, dat we ooit twee lijnstukken krijgen, waarvan de verhouding niet in een positief reëel getal is uit te drukken is dus niet aanwezig.

Als we van enige lijnstukken de verhouding bepalen tot een vast lijnstuk PQ, dan vinden we daarvoor dus een getal k_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Bij ieder van die lijnstukken behoort dus zo'n getal k_i. Dit getal noemen we de *lengte* van het lijnstuk en PQ is de *lengte-eenheid.*

Stelling: **Als twee lijnstukken AB en PQ een bepaalde verhouding hebben, dan hebben hun lengten dezelfde verhouding, indien ze in dezelfde lengte-eenheid uitgedrukt zijn.**

Bewijs: Als lengte-eenheid nemen we een lijnstuk k. Stel de lengte van AB = a en die van PQ = p. Dan hebben we $AB = ak$ en $PQ = pk$. Uit $PQ = pk$ volgt, dat $k = (1/p) \cdot PQ$, dus

$$AB = a \cdot \left(\frac{1}{p} \cdot PQ\right) = \left(a \cdot \frac{1}{p}\right) \cdot PQ \rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{a}{p}.$$

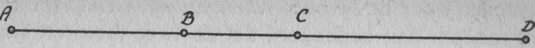
Hier staat dus, dat de verhouding van AB en PQ dezelfde is als de verhouding van de maatgetallen a en p.

We noemen de verhouding van twee lijnstukken AB en PQ meetbaar als er een lijnstuk bestaat, dat een geheel aantal malen op AB en ook op PQ begrepen is. De verhouding van twee lijnstukken AB en PQ heet onmeetbaar, als er geen enkel lijnstuk bestaat, hoe klein ook, dat een geheel aantal malen op AB en PQ begrepen is.

Als de verhouding van twee lijnstukken AB en PQ gelijk is aan a/b of zoals dat ook wel geschreven wordt gelijk is aan $a : b$, dan betekent dat, dat AB gelijk is aan a maal een lijnstuk k en dat PQ gelijk is aan b maal dat lijnstuk k, dus $AB = ak$ en $PQ = bk$.

Als in figuur 75 AB, BC en CD zich verhouden als $3 : 2 : 4$, dan kunnen we hieruit de verhouding afleiden van bijvoorbeeld AC en BD. Dat gaat als volgt: In verband met de gegeven verhouding mogen we zeggen: $AB = 3k$, $BC = 2k$ en $CD = 4k$, waarin k dus een onbekend lijnstuk is, dat 3 maal op AB, 2

(75)



maal op BC en 4 maal op CD begrepen is. Het lijnstuk AC = AB + BC = 3k + 2k = 5k. Het lijnstuk BD = BC + CD = 2k + 4k = 6k. De verhouding van AC en BD is dan 5k : 6k. Dit kan ook geschreven worden als 5k/6k en dat is dan weer hetzelfde als 5/6. We vinden dus dat AC en BD zich verhouden als 5 : 6.

Een evenredigheid is de gelijkheid van twee verhoudingen. Dit kunnen verhoudingen van lijnstukken of van getallen zijn. Omdat de verhouding van twee lijnstukken dezelfde is als de verhouding van hun maatgetallen, zullen we in het vervolg, als we over de verhouding van AB en PQ spreken, daar doorgaans de verhouding van hun lengten, dus van hun maatgetallen mee bedoelen.

In de rekenkunde wordt een aantal eigenschappen van de verhoudingen en de evenredigheden bewezen. Een deel van deze eigenschappen wordt ook bij de verhoudingen en evenredigheden in de meetkunde toegepast. We geven nu enkele van deze eigenschappen.

Een verhouding a : b verandert niet, als we a en b met eenzelfde getal vermenigvuldigen of door eenzelfde getal delen.

Dus 8 : 10 is gelijk aan 24 : 30, of algemeen a : b is ak : bk en 8 : 10 is gelijk aan 4 : 5, of algemeen a : b is a/k : b/k.

In een evenredigheid mogen we de termen van de eerste reden òf die van de tweede reden met eenzelfde getal vermenigvuldigen of door eenzelfde getal delen.

Dus uit: a : b = c : d volgt ak : bk = c : d.
Uit a : b = c : d volgt a/k : b/k = c :d.
Uit a : b = c : d volgt a : b = ck : dk.
Uit a : b = c : d volgt a : b = c/k : d/k.

In een evenredigheid mogen we de twee middelste termen verwisselen en ook de twee buitenste termen.

Dus uit a : b = c : d volgt a : c = b : d.
Uit a : b = c : d volgt d : b = c : a.
Uit a : b = c : d volgt d : c = b : a.

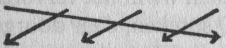
In een evenredigheid is het produkt van de twee middelste termen gelijk aan het produkt van de twee buitenste termen.

Dus uit a : b = c : d volgt b · c = a · d.

We noemen dit de *hoofdeigenschap van de evenredigheden.* Om-

gekeerd kunnen we uit twee gelijke produkten een evenredigheid opstellen door de *omgekeerde hoofdeigenschap* toe te passen. We moeten dan bedenken, dat de twee factoren van het eerste produkt de middelste termen en de twee factoren van het tweede produkt de buitenste termen van de evenredigheid moeten vormen, waarbij we in verband met de onderlinge verwisselbaarheid van de factoren van een produkt verschillende evenredigheden kunnen krijgen. Een bekend handigheidje om deze bewerking uit te voeren is alle factoren van die twee produkten een plaats naar links te zetten behalve de eerste die helemaal naar rechts moet. Ze staan dan in de juiste volgorde om een evenredigheid te kunnen vormen.

Dus $a \cdot b = c \cdot d$



$b : c = d : a$

Als controle kunnen we op deze evenredigheid de hoofdeigenschap toepassen, om te zien of we dezelfde twee gelijke produkten terugvinden.

We zullen nu gaan zien, wat we met de begrippen *rechtevenredig*, *omgekeerd evenredig*, *gemiddelde* en *middelevenredig* bedoelen.

Definitie: Twee veranderlijke grootheden heten recht evenredig, als bij verandering van beide, hun verhouding dezelfde blijft.

Dus als $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 \ldots$ dan zijn a en b recht evenredig.

Definitie: Twee veranderlijke grootheden heten omgekeerd evenredig, als bij verandering van beide hun produkt hetzelfde blijft.

Als dus $a_1 : b_1 = c$, $a_2 : b_2 = c$, $a_3 : b_3 = c \ldots$ dan zijn a en b omgekeerd evenredig.

Definitie: Onder het gemiddelde van twee lijnstukken verstaan we het lijnstuk, dat gelijk is aan de halve som van die twee lijnstukken.

Als dus $c = \frac{1}{2}(a + b)$, dan is c het gemiddelde van a en b. In stelling 62 is bewezen, dat de middenparallel in een trapezium het gemiddelde is van de evenwijdige zijden.

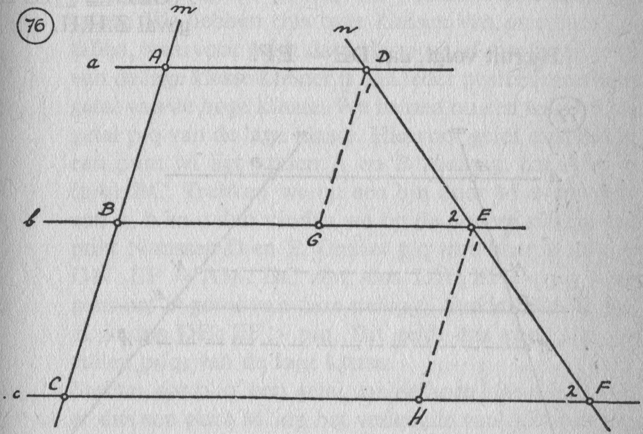
Definitie: Onder de middelevenredige van twee lijnstukken a en b verstaan we het lijnstuk c waarvoor geldt, dat $a : c = c : b$.

Als we de hoofdeigenschap van de evenredigheden hierop toepassen vinden we:

$$c^2 = a \cdot b, \text{ dus } c = \sqrt{a \cdot b}.$$

Opmerking: Als in deze definities sprake is van lijnstukken, dan bedoelen we de maatgetallen van die lijnstukken, uitgedrukt in dezelfde lengte-eenheid.
We krijgen nu enkele stellingen over evenredigheid van lijnstukken. Allereerst een hulpstelling, die we nodig hebben om de twee volgende stellingen te bewijzen.

(76)



Stelling 64: **Als enige evenwijdige lijnen op een snijlijn gelijke stukken bepalen, dan zijn de stukken, die ze op een andere snijlijn bepalen ook gelijk.**

Gegeven: a // b // c, snijlijn m, snijlijn n, AB = BC. (fig. 76)
Te bew.: DE = EF.
Bewijs: Trek uit D en E de lijnstukken DG en EH evenwijdig aan AC

a // b (geg.)
AB // DG (z.b.)
} → BGDA is een parm. (def.) $\xrightarrow{1}$

b // c (geg.)
BC // EH (z.b.)
} → CHEB is een parm. (def.) $\xrightarrow{2}$

$\xrightarrow{1}$ DG = AB (st. 35)
$\xrightarrow{2}$ EH = BC (st. 35)
AB = BC (geg.)
} →

→ DG = EH

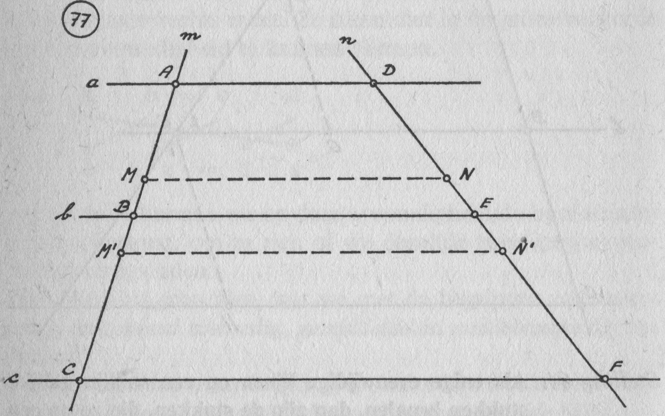
$$\left.\begin{array}{l} DG \parallel AC \text{ (geg.)} \\ EH \parallel AC \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow DG \parallel EH \text{ (ax. 4)} \xrightarrow{1}$$

$$\left.\begin{array}{r} \xrightarrow{1} \angle D_1 = \angle E_1 \text{ (st. 7a)} \\ b \parallel c \text{ (geg.)} \rightarrow \angle E_2 = \angle F_2 \text{ (overeenk. hk.)} \\ DG = EH \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \triangle GED \cong \triangle HFE.$$

geval Z.H.H.

Hieruit volgt, dat DE = EF.



Stelling 65: **Als enige evenwijdige lijnen gesneden worden door twee andere lijnen, dan is de verhouding van de stukken op de ene snijlijn gelijk aan de verhouding van de corresponderende stukken op de andere snijlijn.**

Gegeven: a // b // c, snijlijn m, snijlijn n. (fig. 77)

Te bew.: AB : BC = DE : EF.

Bewijs: We onderscheiden twee gevallen:

1. De verhouding van AB en BC is meetbaar.
2. De verhouding van AB en BC is onmeetbaar.

Geval 1: Als de verhouding van AB en BC meetbaar is, namelijk p : q, dan bestaat er een lijnstuk k zó, dat AB = pk en BC = qk, waarbij p en q natuurlijke getallen zijn. We verdelen nu AB in p en BC in q gelijke delen en trekken door de deelpunten lijnen die evenwijdig zijn met de evenwijdige lijnen a, b en c. Volgens stelling 64 worden dan DE en EF ook in p,

respectievelijk q gelijke delen k' verdeeld, zodat $DE = pk'$ en $EF = qk'$. De verhouding van DE en EF is dus ook $p : q$. Hieruit volgt, dat $AB : BC = DE : EF$.

Geval 2: (fig. 77) De verhouding van AB en BC is gelijk aan k en k is onmeetbaar; k is dus een onmeetbare snede in het gebied der positieve meetbare getallen. We hebben dus twee klassen van meetbare getallen, waarvoor geldt dat ieder positief meetbaar getal van de lage klasse kleiner is dan ieder positief meetbaar getal van de hoge klasse. We nemen nu een willekeurig getal p/q van de lage klasse. Hiervoor geldt dus, dat er een punt M ligt tussen A en B zódanig, dat $AM = (p/q) \cdot BC$. Trekken we nu een lijn door M evenwijdig aan a, b en c dan vinden we op de andere snijlijn een punt N tussen D en E. Omdat p/q meetbaar is zal dus $DN : EF = AM : BC$ zijn, dus $DN : EF = p/q$ (volgens het 1e geval van deze stelling). Omdat $DN < DE$ is, is dus $DE : EF > p/q$. Dit geldt dus voor alle gevallen p_i/q_i van de lage klasse.
Stel nu, dat p'/q' een getal van de hoge klasse is, dan is er dus een punt M' op het verlengde van AB zodanig, dat $AM' = (p'/q') \cdot BC$. De lijn door M' evenwijdig aan a, b en c geeft een punt N', op het verlengde van DE. Volgens geval 1 van deze stelling is $AM' : BC = DN' : EF$, dus $DN' : EF = p'/q'$. Omdat $DE < DN'$ is, is $DE : EF < p'/q'$ en dit geldt weer voor ieder getal p_i'/q_i' van de hoge klasse. Samenvattend hebben we dus $DE : EF$ is kleiner dan ieder getal van de hoge klasse en groter dan ieder getal van de lage klasse. Beide klassen behoren bij de snede, die k bepaalt, dus $DE : EF = k$ en daar $AB : BC = k$, is dus ook $AB : BC = DE : EF$.

Opmerking: Nu het bewijs geleverd is voor drie evenwijdige lijnen is gemakkelijk aan te tonen, dat het ook geldt voor het geval er meer evenwijdige lijnen zijn. We maken daarbij gebruik van een schema zoals hieronder volgt:

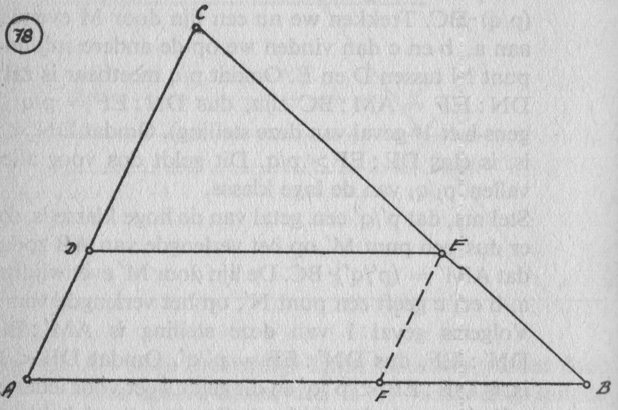
$$\left.\begin{array}{l} A : B = C : D \\ \\ P : Q = C : D \end{array}\right\} \rightarrow A : B = P : Q. \text{ (schema 7a)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A : B = C : D \\ P : Q = R : S \\ C \quad = R \\ D \quad = S \end{array}\right\} \rightarrow A : B = P : Q. \text{ (schema 7b)}$$

Verder hebben we nog een schema, dat gebruikt kan worden om de gelijkheid van twee lijnstukken te bewijzen met behulp van evenredigheden.

$$\left.\begin{array}{l} A : B = C : D \\ P : Q = R : S \\ B \quad = Q \\ C \quad = R \\ D \quad = S \end{array}\right\} \rightarrow A = B. \text{ (schema 8)}$$

78



Stelling 66: **Als een lijn evenwijdig is met een zijde van een driehoek, dan snijdt deze lijn een driehoek af, waarvan de zijden evenredig zijn met de corresponderende zijden van de oorspronkelijke driehoek.**

Gegeven: △ABC, DE // AB. (fig. 78)

Te bew.: CE : CB = DE : AB = CD : CA.

Bewijs: DE // AB (geg.) → CE : CB = CD : CA. (st. 65)
Trek nu uit E een lijnstuk EF // AC.

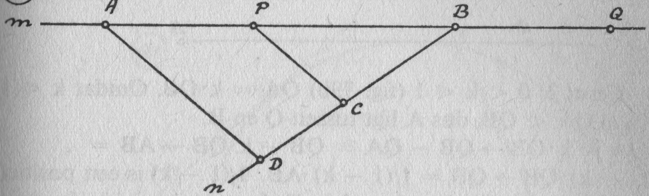
$$\left.\begin{array}{l} DE \;/\!/\; AB \text{ (geg.)} \\ \\ EF \;/\!/\; AD \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow AFED \text{ is een parm. (def.)} \rightarrow \rightarrow DE = AF$$

$$\left.\begin{array}{r} EF \parallel AC \text{ (z.b.)} \rightarrow CE : CB = AF : AB \\ DE = AF \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow CE : CB = DE : AB.$$

We hebben nu dus: $CE : CB = DE : AB = CD : CA$.

79a



Stelling 67: **Als een lijn m door twee verschillende punten A en B gaat, dan is er op m juist één punt P tussen A en B waarvoor geldt, dat PA: PB = k en ook juist één punt Q dat niet tussen A en B ligt, waarvoor geldt, dat QA: QB = k, waarbij k in beide gevallen een positief reëel getal voorstelt.**

Bewijs: (fig. 79a) Trek door B een van m verschillende rechte n en neem op n een punt C, zó dat $BC = p$ (p willekeurig). Nu kunnen we op n ook nog een punt D bepalen, zodanig dat $CD = kp$ en C tussen B en D ligt. We trekken AD en uit C het lijnstuk $CP \parallel AD$. Uit het voorgaande blijkt, dat we in ieder geval één punt tussen A en B vinden voor iedere waarde van k. Volgens stelling 65 is nu $PA : PB = CD : CB \rightarrow PA : PB = kp : p \rightarrow PA : PB = k : 1 = k$.

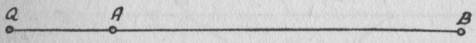
Stel nu, dat P′ een punt tussen A en P is. Omdat $PA : PB = k$, is dus $P'A : P'B < k$, want $P'A < PA$ en $P'B > PB$. Voor een punt P″ tussen P en B geldt, dat $P''A : P''B > k$, is want $P''A > PA$ en $P''B < PB$. Er is dus tussen A en B één en niet meer dan één punt P, waarvoor geldt, dat $PA : PB = k$.

We zullen nu het bestaan van een punt Q aantonen, waarvoor geldt, dat $QA : QB = k$. We onderscheiden twee gevallen, namelijk $k > 1$ en $0 < k < 1$. Hieruit valt op te merken, dat we het geval $k = 1$ uitsluiten, omdat we ons niet met oneindig verre punten bezig houden.

Geval 1: (fig. 79a) Omdat $k > 1$ is en $QA = k \cdot QB$ is, is dus $QA > QB$, d.w.z. dat B tussen A en Q ligt, dus $QA - QB = AB$. $QA = k \cdot QB \rightarrow QA - QB = (k - 1) \cdot QB \rightarrow AB =$

$(k - 1) \cdot QB \rightarrow QB = 1/(k - 1) \cdot AB$. Als we AB met $1/(k - 1)$ vermenigvuldigen is er juist één punt Q op het verlengde van AB zodanig, dat $QB = 1/(k - 1) \cdot AB$. Er is dus ook juist één punt Q op het verlengde van AB, waarvoor geldt, dat $QA : QB = k$.

79b



Geval 2: $0 < k < 1$ (fig. 79b) $QA = k \cdot QB$. Omdat $k < 1$ is, is $QA < QB$, dus A ligt tussen Q en B.
$QA = k \cdot QB \rightarrow QB - QA = QB - k \cdot QB \rightarrow AB = (1 - k) \cdot QB \rightarrow QB = 1/(1 - k) \cdot AB$. $1/(1 - k)$ is een positief reëel getal, omdat $1 - k > 0$ is. Er bestaat dus juist één punt Q op het verlengde van BA, waarvoor geldt: $QA : QB = k$.

Opmerking 1: Voor $k = 0$ is $QB = 1/(1 - 0) \cdot AB \rightarrow QB = AB$. Dus dan valt Q samen met A.

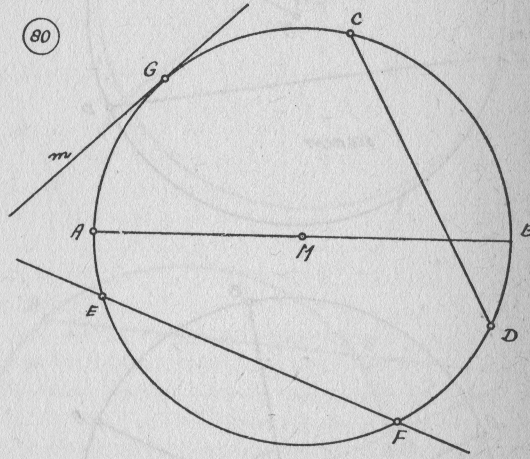
Opmerking 2: Als P tussen A en B ligt, dan zeggen we dat P het lijnstuk AB *inwendig* in een bepaalde verhouding verdeelt. Als Q niet tussen A en B ligt, dan zeggen we dat Q het lijnstuk AB *uitwendig* in een bepaalde verhouding verdeelt.
Bij ieder positief reëel getal k behoort dus op de rechte m door A en B een tweetal punten P en Q, die AB inwendig respectievelijk uitwendig in een verhouding verdelen, die gelijk is aan k. We hebben hier dus een (1, 2) verwantschap, tussen het getal k en de punten P en Q. Nemen we op de rechte m een bepaalde richting als positief en de tegenovergestelde richting als negatief aan, dan zal het getal k bij een inwendige verdeling, dus bij $PA : PB = k$, negatief worden omdat PA en PB verschillen van teken. Als we namelijk de richting AB als positief nemen, dan is PB ook positief en PA negatief, dus het quotiënt is negatief. Bij de uitwendige verdeling $QA : QB = k$ is k daarentegen positief, daar QA en QB dan beide negatief of beide positief zijn en hun quotiënt dus zeker positief is. Daar we nu dus bij een positief reëel getal k een punt Q vinden, dat niet tussen A en B ligt en bij een negatief reëel getal k een punt P tussen A en B, is er tussen het getal k en de punten van m een (1, 1) verwantschap. Ieder reëel getal bepaalt één-éénduidig een punt op de rechte m door A en B, met uitzondering van $k = 1$.

VI. DE CIRKEL

A. ALGEMEEN

Definitie: Een cirkel is een gesloten kromme lijn, waarvan alle punten evenver verwijderd zijn van een vast punt, het middelpunt.

80



Definitie: Een straal van een cirkel is een lijnstuk, dat het middelpunt van de cirkel verbindt met een punt van de cirkel. (fig. 80, MA)

Definitie: Een middellijn van een cirkel is een lijnstuk, gevormd door twee stralen, die in elkaars verlengde liggen. (fig. 80, AB)

Definitie: Een koorde in een cirkel is een lijnstuk, dat twee punten van de cirkel verbindt en niet door het middelpunt gaat. (fig. 80, CD)

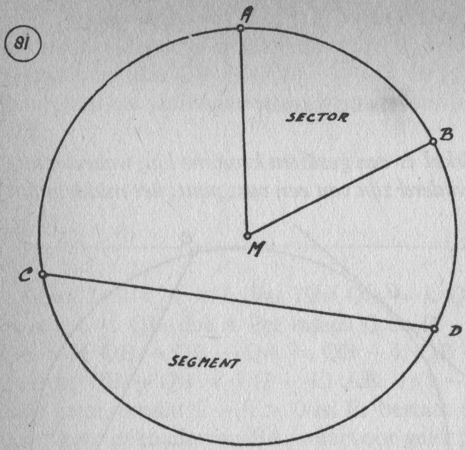
Definitie: Een snijlijn van een cirkel is een rechte, die twee punten met de cirkel gemeen heeft. (fig. 80, EF)

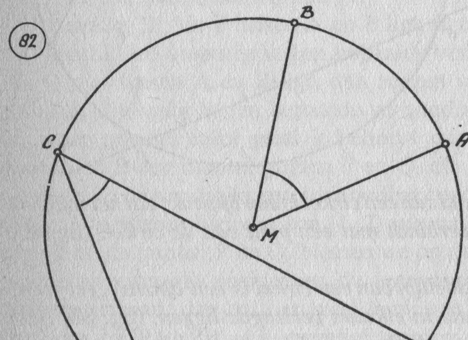
Definitie: Een raaklijn aan een cirkel is een rechte, die slechts één punt met de cirkel gemeen heeft. (fig. 80, m)

Definitie: Een cirkelsector is een figuur begrensd door twee stralen en een boog van de cirkel. (fig. 81)

Definitie: Een cirkelsegment is een figuur begrensd door een koorde en een boog van de cirkel. (fig. 81)

Definitie: Een middelpuntshoek in een cirkel is een hoek gevormd door twee stralen van de cirkel. (fig. 82)

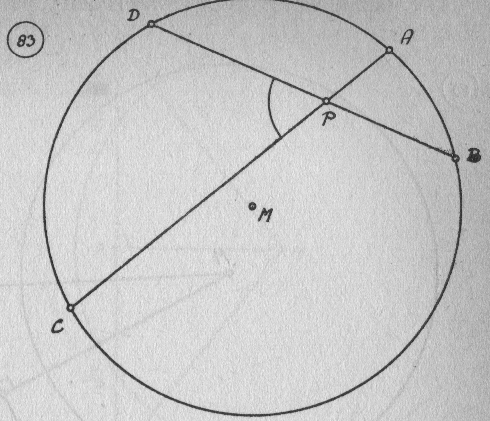


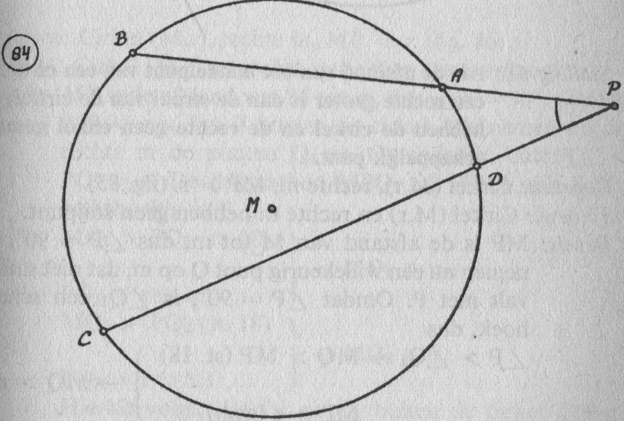


Definitie: Een omtrekshoek in een cirkel is een hoek, waarvan het hoekpunt op de cirkel ligt en waarvan de benen middellijn of koorde van de cirkel zijn. (fig. 82)

Definitie: Een binnenomtrekshoek in een cirkel is een hoek, waarvan het hoekpunt binnen de cirkel ligt. (fig. 83)

Definitie: Een buitenomtrekshoek van een cirkel is een hoek, waarvan het hoekpunt buiten de cirkel ligt, terwijl ieder van de benen minstens één punt met de cirkel gemeen heeft. (fig. 84)





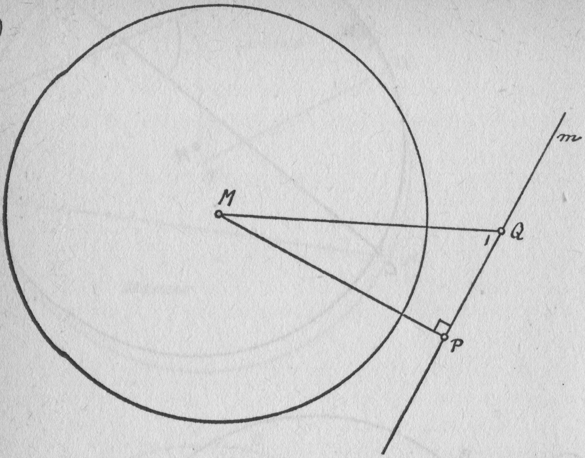
B. CIRKEL EN RECHTE

We geven een cirkel meestal aan door achtereenvolgens het middelpunt en de straal te noemen, dus de cirkel (M,r) heeft M tot middelpunt en r tot straal.

Als de afstand van een punt P tot het middelpunt M van cirkel (M,r) *kleiner* is dan de straal r, dan ligt punt P *binnen* de cirkel. Als de afstand van P tot M *gelijk* is aan r, dan ligt P *op* de cirkel.

Als de afstand van P tot M *groter* is dan r, dan ligt P *buiten* cirkel (M,r).

(85)



Stelling 68: **Als de afstand van het middelpunt van een cirkel tot een rechte groter is dan de straal van de cirkel, dan hebben de cirkel en de rechte geen enkel gemeenschappelijk punt.**

Gegeven: Cirkel (M,r), rechte m, MP > r. (fig. 85)

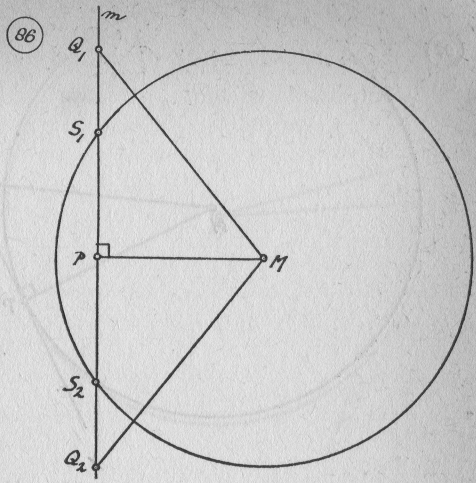
Te bew.: Cirkel (M,r) en rechte m hebben geen snijpunt.

Bewijs: MP is de afstand van M tot m, dus $\angle P = 90°$. We nemen nu een willekeurig punt Q op m, dat niet samenvalt met P. Omdat $\angle P = 90°$, is $\angle Q_1$ een scherpe hoek, dus

$$\left.\begin{array}{r} \angle P > \angle Q_1 \rightarrow MQ > MP \text{ (st. 18)} \\ MP > r \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow MQ > r.$$

Omdat MQ groter dan r is, ligt Q dus buiten de cirkel en daar Q een willekeurig punt van m is, geldt deze betrekking voor ieder punt van m. Maar dat betekent, dat geen enkel punt van m op de cirkel ligt, dus dat de cirkel (M,r) en de rechte m geen gemeenschappelijk punt hebben.

Stelling 69: **Als de afstand van het middelpunt van een cirkel tot een rechte kleiner is dan de straal van de cirkel, dan hebben de cirkel en de rechte twee gemeenschappelijke punten.**



Gegeven: Cirkel (M,r), rechte m, MP < r. (fig. 86)
Te bew.: Cirkel (M,r) en rechte m hebben twee snijpunten.
Bewijs: MP is de afstand van M tot m, dus $\angle P = 90°$. Omdat MP < r is, ligt P binnen de cirkel. We nemen op de rechte m de punten Q_1 en Q_2 zodanig, dat $PQ_1 = PQ_2 = r$. De driehoeken MPQ_1 en MPQ_2 zijn beide rechthoekig in P, dus

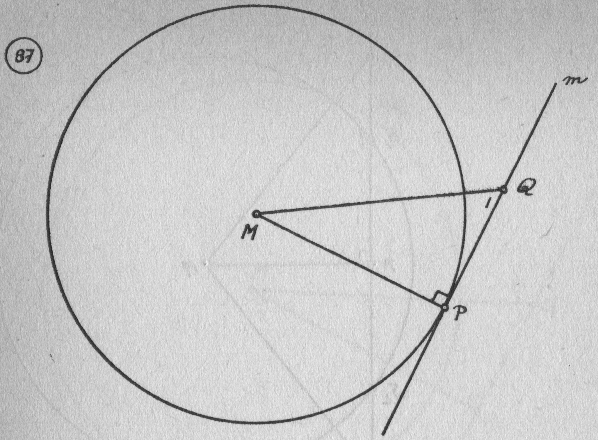
$$\left.\begin{array}{l} MQ_1 > PQ_1 \text{ (st. 18)} \\ PQ_1 = r \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow MQ_1 > r.$$

$$\left.\begin{array}{l} MQ_2 > PQ_2 \text{ (st. 18)} \\ PQ_2 = r \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow MQ_2 > r.$$

Hieruit volgt, dat Q_1 en Q_2 buiten de cirkel liggen. Maar als P binnen en Q_1 buiten de cirkel ligt, is er tussen P en Q_1 een punt S_1, dat op de cirkel ligt en evenzo is er een punt S_2, dat op de cirkel ligt, tussen P en Q_2. De cirkel (M,r) en de rechte m hebben dus de punten S_1 en S_2 gemeenschappelijk.

Stelling 70: **Als de afstand van het middelpunt van een cirkel tot een rechte gelijk is aan de straal van de cirkel, dan hebben de cirkel en de rechte één gemeenschappelijk punt.**

Gegeven: Cirkel (M,r), rechte m, MP = r. (fig. 87)



Te bew.: Cirkel (M,r) en rechte m hebben één gemeenschappelijk punt.

Bewijs: MP = r (geg.) → P ligt op de cirkel.
MP is de afstand van M tot m, dus $\angle P = 90°$.
Als Q een willekeurig punt van m is, dat niet samenvalt met P, dan is in $\triangle MPQ$:

$$\left.\begin{array}{r} \angle P > \angle Q_1 \rightarrow MQ > MP \text{ (st. 18)} \\ MP = r \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow MQ > r.$$

Hieruit volgt, dat ieder punt van m, dat niet samenvalt met P, buiten cirkel (M,r) ligt en dat cirkel (M,r) en rechte m juist één gemeenschappelijk punt P hebben.

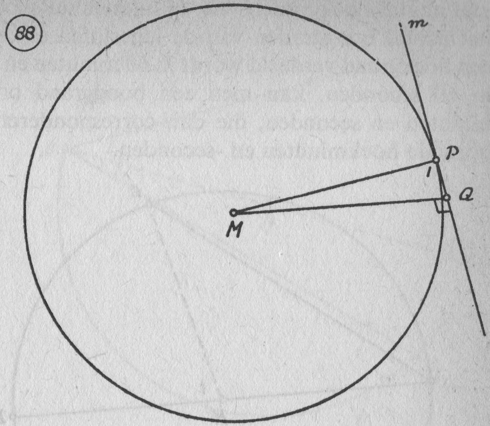
Een gevolg van bovenstaande stelling is dus: Als de afstand van het middelpunt van een cirkel tot een rechte m gelijk is aan de straal van de cirkel, dan is m een raaklijn van de cirkel, of anders gezegd: Als een rechte m in een punt P van de cirkel (M,r) loodrecht staat op de straal MP, dan raakt lijn m aan cirkel (M,r).

Stelling 71: **Als een lijn m raakt aan een cirkel (M,r), dan staat lijn m loodrecht op de straal, die naar het raakpunt gaat.**

Gegeven: Cirkel (M,r), rechte m raakt cirkel (M,r) in P. (fig. 88)

Te bew.: $m \perp MP$.

Bewijs: Er zijn twee mogelijkheden: $m \perp MP$ of m niet $\perp$ MP.



Stel nu dat m niet loodrecht op MP staat. We laten dan uit M de loodlijn MQ op m neer. In $\triangle MQP$ is $\angle Q = 90°$, dus

$$\left.\begin{array}{r}\angle Q > \angle P_1 \rightarrow MP > MQ \text{ (st. 18)} \\ MP = r\end{array}\right\} \rightarrow MQ < r.$$

Dan zal Q dus binnen de cirkel liggen, maar dit is onmogelijk, omdat m aan de cirkel raakt en dus slechts één punt met de cirkel gemeen heeft, terwijl alle andere punten van m buiten de cirkel liggen volgens stelling 70. Maar dan blijft alleen de mogelijkheid over, dat $m \perp MP$.

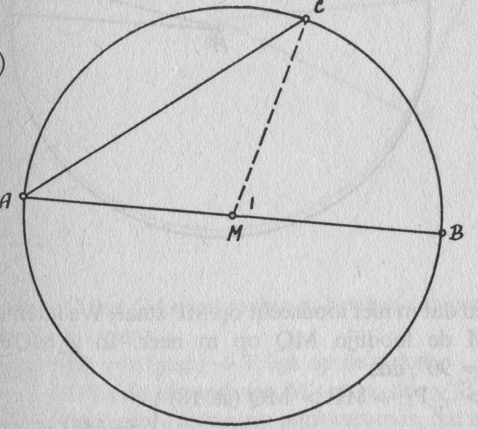
C. HOEKEN EN BOGEN

Als we in een cirkel een aantal stralen tekenen zodanig, dat iedere straal MP_k een hoek van één graad maakt met de straal MP_{k+1} ($k = 1, 2, \ldots$) dan wordt de cirkel verdeeld in 360 congruente boogjes. *We zeggen, dat één zo'n boogje een grootte heeft van één booggraad.* Als een middelpuntshoek a° groot is, dan sluit hij een cirkelboog in van a booggraden.
We hebben dus de volgende stelling:

Stelling 72: **Een middelpuntshoek van een cirkel is gelijk aan de boog waarop hij staat.**

Het aantal hoekgraden van de middelpuntshoek is gelijk aan het aantal booggraden van de ingesloten cirkelboog. Evenals een hoekgraad verdeeld wordt in 60 minuten en deze ieder weer in 60 seconden, kan men een booggraad onderverdelen in minuten en seconden, die dan corresponderen met de bijbehorende hoekminuten en -seconden.

89



Stelling 73: **Een omtrekshoek van een cirkel is gelijk aan de helft van de boog, waarop hij staat.**

Gegeven: Cirkel (M,r), A, B en C liggen op cirkel (M,r).

Te bew.: $\angle CAB = \frac{1}{2}$ bg BC.

1e *geval:* M ligt op één van de benen van $\angle$CAB. (fig. 89)

Bewijs: Trek CM.

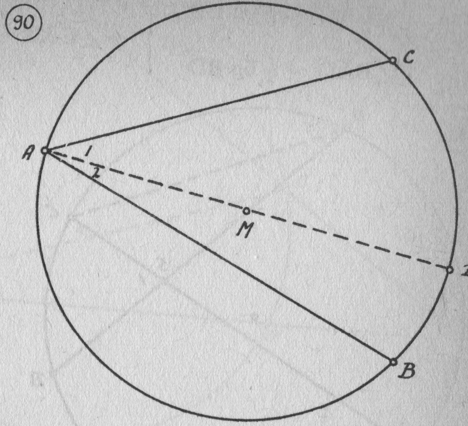
$$\left.\begin{array}{r} \angle M_1 = \angle CAB + \angle C \\ \text{(st. 12)} \\ AM = CM = r \rightarrow \angle CAB = \angle C \text{ (st. 13)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \angle M_1 = 2\angle CAB \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \rightarrow \angle CAB = \frac{1}{2}\angle M_1 \\ \angle M_1 = \text{bg BC (st. 72)} \end{array}\right\} \rightarrow \angle CAB = \tfrac{1}{2}\text{bg BC.}$$

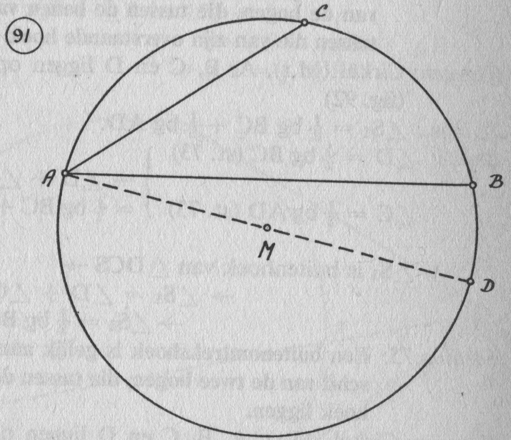
2[e] *geval:* M ligt binnen $\angle$CAB. (fig. 90)

Bewijs: Trek middellijn AD. Omdat M binnen $\angle$CAB ligt, verdeelt AD $\angle$CAB in de hoeken A_1 en A_2. We hebben nu volgens het eerste geval:



$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \frac{1}{2}\text{ bg CD}\\ \angle A_2 = \frac{1}{2}\text{ bg DB}\end{array}\right\} \rightarrow \angle CAB = \frac{1}{2}\text{ bg CB.}$$

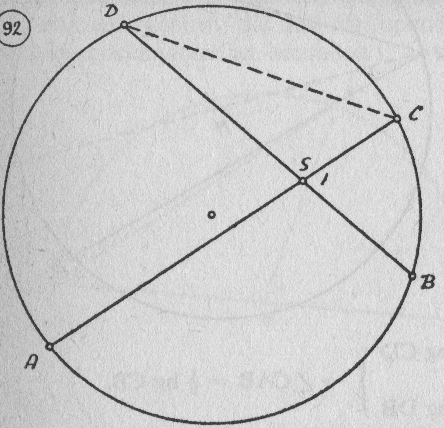
3[e] *geval:* M ligt buiten $\angle$CAB. (fig. 91)



Bewijs: Trek middellijn AD. Omdat M buiten $\angle$CAB ligt, is $\angle CAB = \angle CAD - \angle BAD$. Volgens het eerste geval hebben we:

$$\left.\begin{array}{l}\angle CAD = \frac{1}{2}\text{ bg } CBD \\ \angle BAD = \frac{1}{2}\text{ bg } BD\end{array}\right\} \rightarrow \angle CAB = \tfrac{1}{2}\text{ bg } CB.$$

92



Stelling 74: **Een binnenomtrekshoek is gelijk aan de halve som van de bogen, die tussen de benen van die hoek en tussen die van zijn overstaande hoek liggen.**

Gegeven: Cirkel (M,r), A, B, C en D liggen op cirkel (M,r). (fig. 92)

Te bew.: $\angle S_1 = \frac{1}{2}$ bg BC $+ \frac{1}{2}$ bg AD.

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle D = \frac{1}{2}\text{ bg } BC \text{ (st. 73)} \\ \angle C = \frac{1}{2}\text{ bg } AD \text{ (st. 73)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle D + \angle C = \\ \qquad = \frac{1}{2}\text{ bg } BC + \frac{1}{2}\text{ bg } AD \\ \angle S_1 \text{ is buitenhoek van } \triangle DCS \rightarrow \\ \qquad \rightarrow \angle S_1 = \angle D + \angle C \text{ (st. 12)}\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \angle S_1 = \tfrac{1}{2}\text{ bg } BC + \tfrac{1}{2}\text{ bg } AD.$$

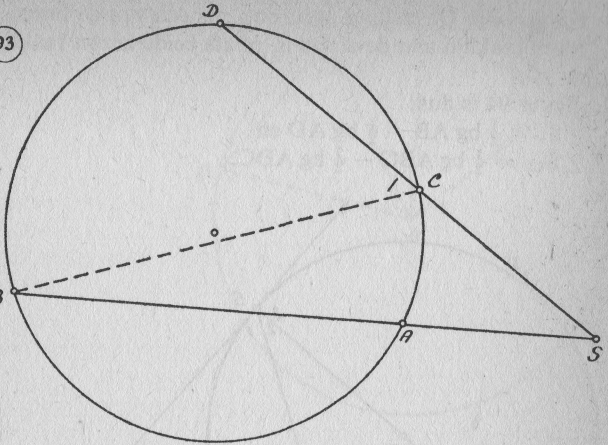
Stelling 75: **Een buitenomtrekshoek is gelijk aan het halve verschil van de twee bogen, die tussen de benen van die hoek liggen.**

Gegeven: Cirkel (M,r), A, B, C en D liggen op cirkel (M,r). (fig. 93)

Te bew.: $\angle S = \frac{1}{2}$ bg BD $- \frac{1}{2}$ bg AC.

Bewijs: Trek BC.

93



$$\left.\begin{array}{l}\angle C_1 = \tfrac{1}{2}\ \text{bg BD (st. 73)} \\ \angle B \ = \tfrac{1}{2}\ \text{bg AC (st. 73)}\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\angle C_1 - \angle B = \\ = \tfrac{1}{2}\ \text{bg BD} - \tfrac{1}{2}\ \text{bg AC}\end{array}$$

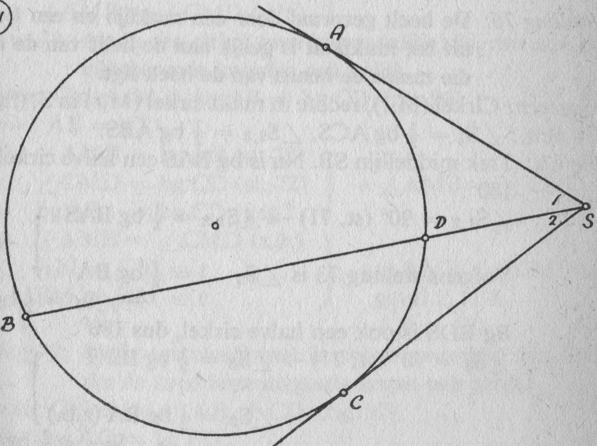
$$\angle C_1 = \angle S + \angle B \ \text{(st. 12)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \angle S = \angle C_1 - \angle B$$

(both results together) $\rightarrow$

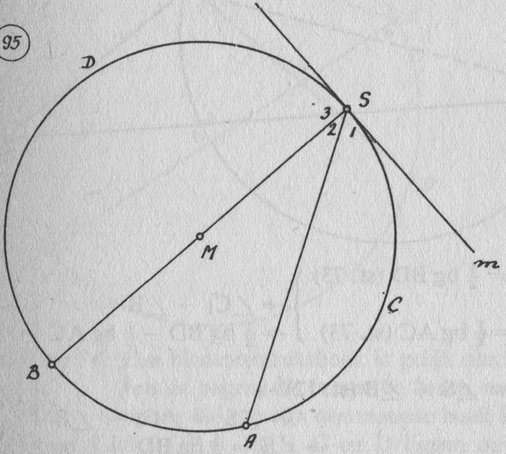
$$\rightarrow \angle S = \tfrac{1}{2}\ \text{bg BD} - \tfrac{1}{2}\ \text{bg AC.}$$

94



Opmerking: De stelling geldt ook, als één van de benen van $\angle S$ een raaklijn aan de cirkel is, of als beide benen raaklijnen zijn.
In figuur 94 is dus:
$\angle S_1 = \frac{1}{2}$ bg AB $- \frac{1}{2}$ bg AD en
$\angle S_{1,2} = \frac{1}{2}$ bg ABC $- \frac{1}{2}$ bg ADC.

(95)



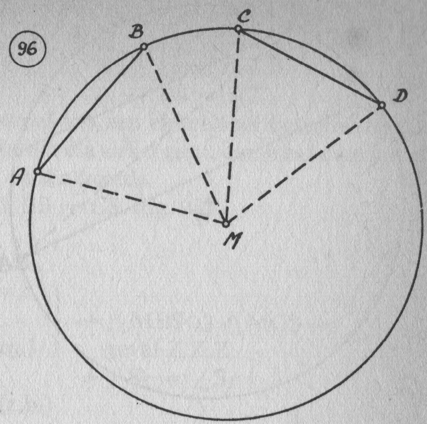
Stelling 76: **De hoek gevormd door een raaklijn en een koorde uit het raakpunt is gelijk aan de helft van de boog, die tussen de benen van de hoek ligt.**
Gegeven: Cirkel (M,r), rechte m raakt cirkel (M,r) in S. (fig. 95)
Te bew.: $\angle S_1 = \frac{1}{2}$ bg ACS, $\angle S_{2,3} = \frac{1}{2}$ bg ABS.
Bewijs: Trek middellijn SB. Nu is bg BAS een halve cirkel, dus 180°.

$\angle S_{1,2} = 90°$ (st. 71) $\rightarrow \angle S_{1,2} = \frac{1}{2}$ bg BAS
Volgens stelling 73 is $\angle S_2 = \frac{1}{2}$ bg BA } $\rightarrow$
$\rightarrow \angle S_1 = \frac{1}{2}$ bg AS.

Bg BDS is ook een halve cirkel, dus 180°.

$\angle S_3 = 90°$ (st. 71) $\rightarrow \angle S_3 = \frac{1}{2}$ bg BDS
$\angle S_2 = \frac{1}{2}$ bg BA (z.b.) } $\rightarrow$
$\rightarrow \angle S_{2,3} = \frac{1}{2}$ bg ABS.

Stelling 77: **Als in een cirkel twee koorden gelijk zijn, dan zijn de bijbehorende bogen ook gelijk.**



Gegeven: Cirkel (M,r), AB = CD. (fig. 96)
Te bew.: bg AB = bg CD.
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} AM = CM = r \\ BM = DM = r \\ AB = CD \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow \triangle AMB \cong \triangle CMD \rightarrow \text{ geval Z.Z.Z.} \rightarrow \angle AMB = \angle CMD$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle AMB = \text{bg } AB \text{ (st. 72)} \\ \angle CMD = \text{bg } CD \text{ (st. 72)} \\ \angle AMB = \angle CMD \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow \text{bg } AB = \text{bg } CD.$$

Stelling 78: **Als in een cirkel twee bogen gelijk zijn, dan zijn de bijbehorende koorden ook gelijk.**

Gegeven: Cirkel (M,r), bg AB = bg CD. (fig. 96)
Te bew.: AB = CD.
Bewijs:

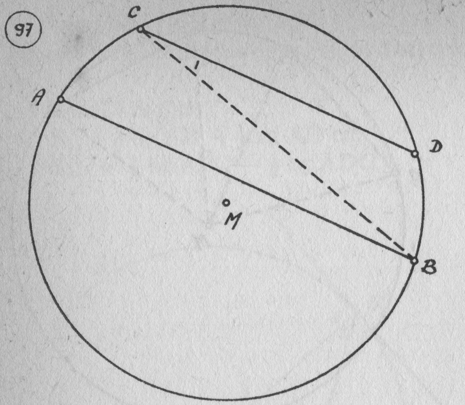
$$\left.\begin{array}{l} \angle AMB = \text{bg } AB \text{ (st. 72)} \\ \angle CMD = \text{bg } CD \text{ (st. 72)} \\ \text{bg } AB = \text{bg } CD \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow \angle AMB = \angle CMD$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle AMB = \angle CMD \text{ (z.b.)} \\ AM = CM = r \\ BM = DM = r \end{array}\right\} \rightarrow \triangle AMB \cong \triangle CMD \rightarrow \text{ geval Z.H.Z.} \rightarrow AB = CD.$$

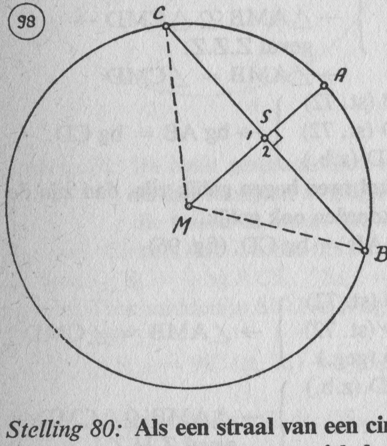
Stelling 79: **Als in een cirkel twee koorden evenwijdig zijn, dan zijn de twee tussenliggende bogen ook gelijk.**

Gegeven: Cirkel (M,r), AB // CD. (fig. 97)
Te bew.: bg AC = bg BD.
Bewijs: Trek BC.

AB // CD (geg.) →



$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow \angle B_1 = \angle C_1 \text{ (st. 7b)}\\ \angle B_1 = \tfrac{1}{2} \text{ bg } AC \text{ (st. 73)}\\ \angle C_1 = \tfrac{1}{2} \text{ bg } BD \text{ (st. 73)}\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}\tfrac{1}{2} \text{ bg } AC = \tfrac{1}{2} \text{ bg } BD,\\ \text{dus bg } AC = \text{bg } BD.\end{array}$$



Stelling 80: **Als een straal van een cirkel loodrecht staat op een koorde van een cirkel, dan deelt deze straal de koorde middendoor.**

Gegeven: Cirkel (M,r), MA $\perp$ BC. (fig. 98)

Te bew.: BS = SC.

Bewijs: Trek MB en MC.

MA $\perp$ BC (geg.) $\rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \angle S_1 = \angle S_2 = 90^\circ \\ MS = MS \\ MC = MB = r \end{array}\right\} \rightarrow \triangle MCS \cong \triangle MBS \rightarrow$$

geval Z.Z.R.

$\rightarrow BS = SC.$

Stelling 81: **Als een straal van een cirkel door het midden van een koorde van die cirkel gaat, dan staat deze straal loodrecht op die koorde.**

Gegeven: Cirkel (M,r), BS = CS. (fig. 98)

Te bew.: $MA \perp BC$.

Bewijs: Trek MB en MC.

$$\left.\begin{array}{l} MB = MC = r \\ MS = MS \\ BS = CS \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow \triangle MBS \cong \triangle MCS \rightarrow$$

geval Z.Z.Z.

$\rightarrow \angle S_1 = \angle S_2$

$$\left.\begin{array}{l} \angle S_1 = \angle S_2 \text{ (z.b.)} \\ \angle S_1 + \angle S_2 = 180^\circ \text{ (nevenhk)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow \angle S_1 = \angle S_2 = 90^\circ \rightarrow MA \perp BC.$

Met een *transformatie* bedoelen we een verband, waardoor de punten en rechten van een figuur F op een bepaalde manier toegevoegd worden aan de punten en rechten van een figuur F′. Bij ieder punt van F behoren dan één of meer punten van F′ en omgekeerd behoren bij ieder punt van F′ één of meer punten van F.
We beschouwen hier alleen enkele van die transformaties, waarbij steeds bij ieder punt van F juist één punt van F′ en bij ieder punt van F′ juist één punt van F behoort. We spreken in dat geval van een één-éénduidige transformatie, ook wel geschreven als een (1, 1)transformatie.
Daar we bij transformatie van een figuur F aan ieder punt van F een ander punt (en soms hetzelfde punt) toevoegen volgens een bepaald voorschrift, zal het aantal transformaties, dat we kunnen toepassen, min of meer onbegrensd zijn. Het voorschrift, dat bij zo'n transformatie behoort, is steeds weer te veranderen, geheel naar de willekeur van degene, die de transformatie wil toepassen. Wij zullen ons echter beperken tot de meest voorkomende transformaties, waarvan we er hier enige noemen. Achtereenvolgens zullen we bespreken:
A. De transformaties, die de verzamelnaam van *verplaatsingen* dragen.
B. De *vermenigvuldigings*transformaties.
C. De *centrale collineatie*.
D. De *inversie*.

A. VERPLAATSINGEN

1. Algemeen

In de verplaatsingsaxioma's worden de grondslagen van de verplaatsingen opgesomd. We moeten ons dat op de volgende manier voorstellen:
Bij een verplaatsing nemen we aan, dat het gehele vlak, waarin zich onze figuren bevinden, aan deze verplaatsing meedoet. We denken ons deze twee-dimensionale ruimte als het ware opgenomen en vervolgens eventueel in een andere stand weer neergelegd. Er ontstaat zo een afbeelding van het vlak met alles wat zich in dat vlak bevindt op dat vlak zelf. Als deze afbeelding

samenvalt met datgene, wat oorspronkelijk aanwezig was, spreken we van een *identieke afbeelding*. Onze belangstelling gaat echter meer uit naar dié gevallen, waarin de afbeelding niet of slechts gedeeltelijk samenvalt met het origineel.

Bij het bewijzen van de stellingen 6 en 7 en ook bij de bewijzen van enige congruentiegevallen hebben we dergelijke verplaatsingen al toegepast. Daarbij is een ruim gebruik gemaakt van ons voorstellingsvermogen en om dit te hulp te komen, zijn toen de figuren dubbel uitgevoerd, namelijk in oorspronkelijke en in verplaatste toestand. We zullen hier nu nog eens bekijken, in hoeverre onze manipulaties toen in overeenstemming waren met de verplaatsingsaxioma's, die zoals we hierboven al opmerkten, de grondslagen zijn van de verplaatsingen. Om het geheel niet al te uitgebreid te maken, zullen we ons ook hier moeten beperken.

Als we op een rechte m een verplaatsing toepassen, dan gaan drie verschillende punten A, B en C van m over in de punten A′, B′ en C′ volgens axioma 10. Spreken we bovendien af, dat B tussen A en C ligt, dan zal B′ tussen A′ en C′ liggen volgens axioma 11. Maar dan liggen A′, B′ en C′ op de rechte m′, volgens axioma 5. Tussen A en C liggen op m oneindig veel punten en voor al deze punten geldt hetzelfde als voor punt B. De verplaatste punten liggen dus allemaal op m′ tussen A′ en C′.

Als D nu een punt van m is zodanig, dat C tussen A en D ligt, dan zal D na dezelfde verplaatsing overgaan in D′ volgens axioma 10. Omdat C tussen A en D ligt, ligt C′ tussen A′ en D′ volgens axioma 11, dus op de rechte m″ door A′ en D′. Nemen we nu aan, dat de rechte m″ bepaald door A′ en D′ (axioma 1) niet dezelfde is als m′, dan zou dat betekenen, dat door A′ en C′ twee verschillende rechten m′ en m″ gaan, hetgeen in strijd is met axioma 1. Het blijkt dus, dat voor ieder punt van m, dat op het verlengde van AB ligt, geldt, dat het na de verplaatsing op m′ ligt. Hetzelfde geldt natuurlijk ook voor de punten van m, die op het verlengde van BA liggen en we hebben dus gevonden:

Stelling 82: **Een rechte m gaat door een verplaatsing V over in een rechte m′.**

Als we op een lijnstuk AB een verplaatsing V toepassen, dan gaan A en B over in de punten A′ en B′ volgens axioma 10 en de rechte m, die door A en B bepaald is, gaat over in de rechte m′ door A′ en B′ volgens stelling 82.

Omgekeerd is er volgens axioma 14 een verplaatsing V^{-1}, die A′ en B′ doet overgaan in de punten A en B. Volgens stelling 82 gaat bij die verplaatsing de rechte m′, die bepaald is door A′ en B′, over in een rechte, die door A en B gaat, dus in de rechte m.
Als dus bij een verplaatsing V het lijnstuk AB overgaat in lijnstuk A′B′, dan is er een andere verplaatsing V^{-1}, waarbij lijnstuk A′B′ overgaat in lijnstuk AB. We weten nu dus:
Stelling 83: **Een lijnstuk AB gaat door een verplaatsing V over in een lijnstuk A′B′.**
We kunnen nu definiëren:
Definitie: We noemen twee lijnstukken AB en A′B′ congruent, als er een verplaatsing is, waarbij lijnstuk AB overgaat in lijnstuk A′B′.
Opmerking: Als twee lijnstukken congruent zijn, zeggen we dat ze *gelijk* zijn.
Als we op een hoek BAC een verplaatsing V toepassen, dan gaan A, B en C over in de punten A′, B′ en C′ volgens axioma 10 en de halve rechten m (bepaald door A en B) en n (bepaald door A en C) gaan over in de halve rechten m′ en n′ als gevolg van stelling 82, waarbij m′ door A′ begrensd wordt en door B′ gaat en n′ door A′ begrensd wordt en door C′ gaat.
Omgekeerd is er volgens axioma 14 een verplaatsing V^{-1}, die A′, B′ en C′ doet overgaan in A, B en C. De halve rechten m′ en n′ gaan dan weer over in m en n als gevolg van stelling 82.
Als m′ en n′ zouden samenvallen, dan zou C′ liggen op de rechte door A′ en B′, bijvoorbeeld *tussen* A′ en B′. Bij de verplaatsing V^{-1} zou C′ volgens axioma 11 overgaan in een punt C″ tussen A en B en volgens axioma 14 zou C′ overgaan in het punt C, dat niet tussen A en B ligt. Daar dit in strijd zou zijn met axioma 10, dat zegt, dat C′ bij de verplaatsing V^{-1} slechts in één ander punt zal overgaan, betekent dit, dat m′ en n′ *niet* samenvallen en daar ze hetzelfde eindpunt A′ hebben, vormen ze dus een hoek met elkaar. We weten nu dus:
Bij een verplaatsing V gaat ∠BAC over in een hoek B′A′C′.
Er is een verplaatsing V^{-1}, waarbij ∠B′A′C′ overgaat in ∠BAC.
Stelling 84: **Een hoek BAC gaat door een verplaatsing V over in een hoek B′A′C′.**
We kunnen nu definiëren:
Definitie: We noemen twee hoeken A en A′ congruent, als er een verplaatsing is, waarbij ∠A overgaat in ∠A′.

Opmerking: Als twee hoeken congruent zijn, zeggen we dat ze *gelijk* zijn.
Als we op een driehoek ABC een verplaatsing V toepassen, dan is met behulp van de laatste drie stellingen gemakkelijk in te zien, dat de zijden AB, BC en AC overgaan in de lijnstukken A'B', B'C' en A'C' en de hoeken A, B en C in de hoeken A', B' en C', dus △ABC gaat over in een driehoek, waarvan A', B' en C' de hoekpunten zijn.
Evenzo gaan bij de verplaatsing V^{-1} de zijden en hoeken van △A'B'C' over in de zijden en hoeken van △ABC.

Stelling 85: **Een driehoek ABC gaat door een verplaatsing V over in een driehoek A'B'C'.**

We kunnen nu definiëren:

Definitie: We noemen twee driehoeken ABC en A'B'C' congruent, als er een verplaatsing is, waarbij △ABC overgaat in △A'B'C'.

Als we op een cirkel (M,r) een verplaatsing V toepassen, gaat M over in M' volgens axioma 10. Voor ieder punt A van de cirkel geldt, dat het overgaat in een punt A', waarbij M'A' = MA = r volgens de definitie van congruente lijnstukken. Voor de punten A' geldt dus, dat ze op een vaste afstand r van M' afliggen en ze liggen dus op de cirkel (M', r).
Omgekeerd zal door de verplaatsing V^{-1} ieder punt B' van cirkel (M',r) overgaan in een punt van cirkel (M,r) en we hebben dus:

Stelling 86: **Een cirkel (M,r) gaat bij een verplaatsing V over in een cirkel (M',r').**

We kunnen nu definiëren:

Definitie: We noemen twee cirkels (M,r) en (M',r') congruent, als er een verplaatsing is, waarbij cirkel (M,r) overgaat in cirkel (M',r').

Opmerking: Uit het bovenstaande is al gebleken, dat twee congruente cirkels gelijke stralen hebben.
We komen nu op de volgende algemene definitie:

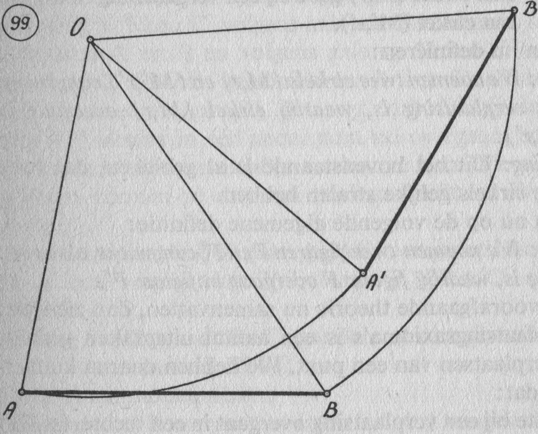
Definitie: We noemen twee figuren F en F' congruent, als er een verplaatsing is, waarbij figuur F overgaat in figuur F'.

Als we de voorafgaande theorie nu samenvatten, dan zien we:
In de verplaatsingsaxioma's is een aantal uitspraken gedaan over het verplaatsen van een punt. We hebben daarna kunnen aantonen, dat:
1. Een rechte bij een verplaatsing overgaat in een rechte. (st. 82)
2. Een lijnstuk bij verplaatsing overgaat in een lijnstuk. (st. 83)

3. Een hoek bij een verplaatsing overgaat in een hoek. (st. 84)
4. Een driehoek bij een verplaatsing overgaat in een driehoek. (st. 85)
5. Een cirkel bij een verplaatsing overgaat in een cirkel. (st. 86)
Daarna konden we definiëren wat we bedoelen met congruente lijnstukken, hoeken, driehoeken, cirkels en willekeurige figuren. In hoofdstuk III hebben we verschillende gevallen besproken van congruente driehoeken. We hebben toen aangetoond, dat onder bepaalde voorwaarden aan de hiervoor genoemde definitie van congruente driehoeken voldaan is. Het gedeelte van dit hoofdstuk (hoofdstuk VII), dat begint bij de verplaatsingen, hadden we dan ook zonder bezwaar vóór de congruentie-gevallen van de driehoeken kunnen onderbrengen en dat zou zelfs een logischer volgorde geweest zijn. Dat het toch hier zijn plaats gekregen heeft, komt, omdat het de overzichtelijkheid van de theorie der transformaties ten goede kan komen.
We kunnen de volgende verplaatsingen onderscheiden:
Rotatie of draaiing.
Translatie of verschuiving.
Spiegeling.
Combinaties (dus volgens axioma 15 produkten) van deze gevallen.

2. *Rotatie of draaiing*

(99)



Definitie: De rotatie of draaiing is een verplaatsing, waarbij slechts één punt van het vlak in zichzelf overgaat.
We noemen dat punt het *centrum van de rotatie*.
In figuur 99 is het lijnstuk AB gedraaid om het punt O tot A in A′ en B in B′ komt.

$$\left.\begin{array}{l}\angle AOB = \angle A'OB' \text{ (def.)} \\ \\ \angle BOA' = \angle BOA'\end{array}\right\} \rightarrow \angle AOA' = \angle BOB'.$$

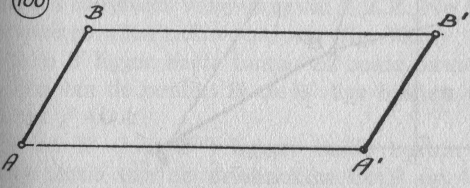
Bij draaiing gaan dus de halve rechten OA en OB over in de halve rechten OA′ en OB′. Hierbij maken OA en OA′ een hoek P met elkaar en OB en OB′ ook. Deze hoek noemen we de draaiingshoek. Omdat OA in OA′ overgaat en OB in OB′ is OA = OA′ en OB = OB′. We hebben dus:

Stelling 87: **Bij een draaiing (O, $\angle$P) beschrijft ieder punt A van een figuur F een deel van een cirkel, die O als middelpunt en OA als straal heeft, terwijl $\angle$AOA′ = $\angle$P.**

3. Translatie of verschuiving

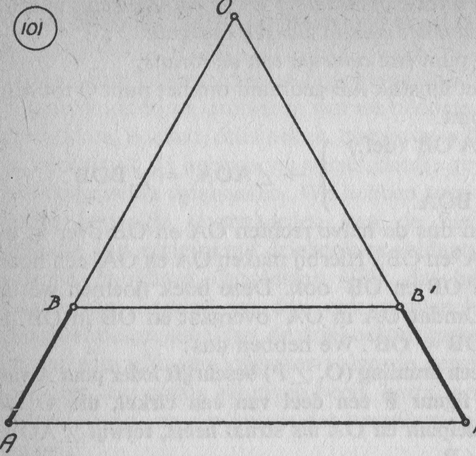
Definitie: De translatie of verschuiving is een verplaatsing, waarbij geen enkel punt van het vlak in zichzelf overgaat.
Bij een verplaatsing gaat lijnstuk AB over in lijnstuk A′B′. Als daarbij geen enkel punt van het vlak in zichzelf overgaat, hebben we volgens de definitie met een translatie te doen. We zullen nu nagaan, wat dat inhoudt. Er zijn verschillende mogelijkheden:

100

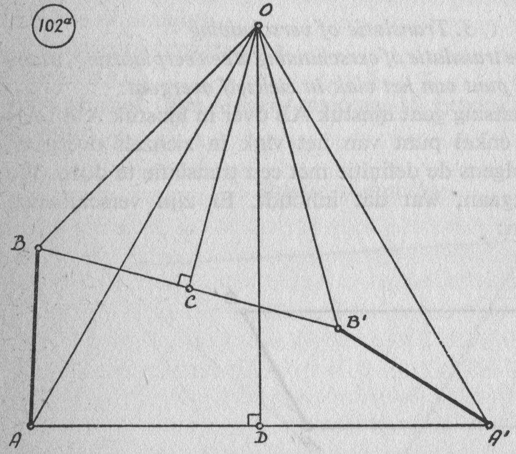


Geval 1: AA′ = BB′. (fig. 100)
Geval 2a: AA′ ≠ BB′, AA′ // BB′. (fig. 101)
Geval 2b: AA′ ≠ BB′, AA′ niet // BB′. (fig. 102a en 102b)
We zullen nu eerst laten zien, dat er in de gevallen 2a en 2b zeker één punt van het vlak in zichzelf overgaat, dus dat we in die gevallen niet met een translatie te doen hebben maar met een rotatie.
Geval 2a: AA′ = BB′, AA′ // BB′. (fig. 101)

101



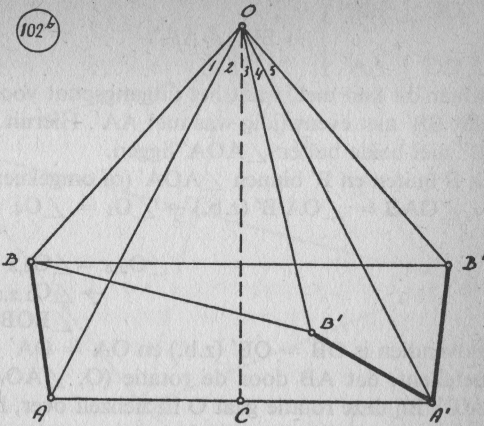
102a



Uit deze gegevens volgt, dat AA′B′B een trapezium is en geen parallellogram, want dan zou AA′ = BB′ zijn. De rechten AB en A′B′ snijden elkaar dus in een punt O.

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \text{ (def.)} \rightarrow \angle A = \angle A' \text{ (st. 51)} \rightarrow \\ \qquad\qquad \rightarrow OA = OA' \\ \\ \qquad\qquad AB = A'B' \text{ (def.)} \end{array}\right\} \rightarrow OB = OB'.$$

We weten nu dus: OA = OA′, OB = OB′, ∠AOA′ =



$\angle BOB'$. Dit betekent, dat AB door de rotatie (O, $\angle AOA'$) overgaat in A'B', maar bij deze rotatie gaat O in zichzelf over, wat in strijd is met de definitie van translatie.

Geval 2b: $AA' \neq BB'$, AA' niet evenwijdig BB'. (fig. 102a) Omdat AA' niet evenwijdig is met BB', zijn de middelloodlijnen van AA' en BB' ook niet evenwijdig en vallen ze ook niet samen. Ze snijden elkaar dus in een punt O. Uit de congruentie van de driehoeken OCB en OCB' volgt nu dat $OB = OB'$ is. Uit de congruentie van de driehoeken ODA en ODA' volgt dat $OA = OA'$ is. Van de driehoeken OAB en OA'B' weten we: $AB = A'B'$ (def.), $OB = OB'$ (z.b.), $OA = OA'$ (z.b.). Deze zijn dus congruent volgens geval Z.Z.Z. Nu kunnen de volgende twee gevallen zich voordoen (fig. 102b)

1. B en B' liggen beide buiten of beide binnen $\angle AOA'$.
2. Eén van de punten B en B' ligt binnen en het andere ligt buiten $\angle AOA'$.

1. B en B' (hier B'') liggen beide buiten $\angle AOA'$. Uit de congruentie van de driehoeken OAB en OA'B'' volgt, dat $\angle O_1 = \angle O_5$. De bissectrice van $\angle BOB''$ is in $\triangle BOB''$ ook hoogtelijn.

$$\left.\begin{array}{l} \angle O_{1,2} = \angle O_{3,4,5} \\ \angle O_1 \;\;= \angle O_5 \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow \angle O_2 = \angle O_{3,4}.$$

Dus OC is ook bissectrice van $\angle AOA'$ en als gevolg daarvan ook hoogtelijn in $\triangle AOA'$.

$$\left.\begin{array}{l} OC \perp BB' \\ \\ OC \perp AA' \end{array}\right\} \rightarrow BB' \,/\!/\, AA'.$$

Maar dit kan niet, want het uitgangspunt voor geval 2b was, dat BB′ niet evenwijdig was met AA′. Hieruit volgt, dat B en B″ niet beide buiten $\angle AOA'$ liggen.

2. B buiten en B′ binnen $\angle AOA'$ (of omgekeerd).

$$\left.\begin{array}{r} \angle OAB = \angle OA'B' \text{ (z.b.)} \rightarrow \angle O_1 = \angle O_4 \\ \\ \angle O_{2,3} = \angle O_{2,3} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \angle O_{1,2,3} = \angle O_{2,3,4}, \text{ òf}$$

$$\angle BOB' = \angle AOA'.$$

Bovendien is OB = OB′ (z.b.) en OA = OA′ (z.b.), maar dat betekent, dat AB door de rotatie (O, $\angle AOA'$) overgaat in A′B′. Bij deze rotatie gaat O in zichzelf over, hetgeen in strijd is met de definitie van translatie.

Nu blijft dus alleen geval 1 over en is dus AA′ = BB′. In figuur 100 is AA′B′B dan een parallellogram, want AA′ = BB′ en AB = A′B′ (def.) Hieruit volgt weer, dat AA′ // BB′. Hoewel de gevallen 2a en 2b tot een resultaat voeren, dat in strijd is met de definitie van translatie houdt dit nog niet 'automatisch' in, dat bij geval 1 deze strijdigheid niet aanwezig is. Uit het gevonden resultaat van geval 1 blijkt echter dat geen enkel punt van het vlak in zichzelf overgaat, daar ieder punt in een bepaalde richting over een bepaalde afstand verschoven is.

We hebben nu:

Stelling 88: **Bij een translatie (PP′), gaat ieder punt A van een figuur F over in een punt A′, waarbij lijnstuk AA′ gelijk is aan en evenwijdig is met het gegeven lijnstuk PP′.**

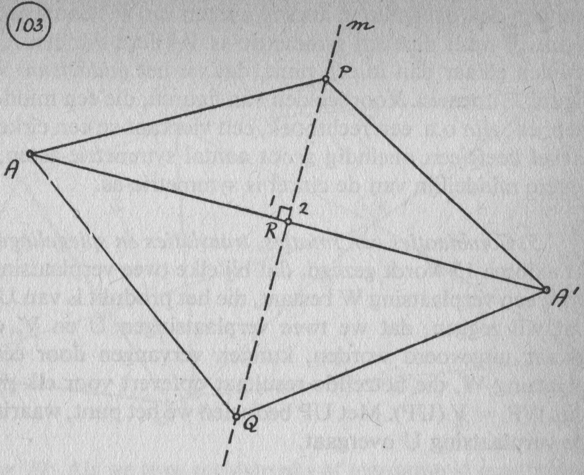
Dit gerichte lijnstuk PP′ noemen we een *vector*.

4. Spiegeling

Definitie: De spiegeling is een verplaatsing, waarbij alle punten van juist één rechte van het vlak in zichzelf overgaan en alle punten buiten die rechte niet.

De rechte m noemen we de *as van spiegeling*.

Als nu m de rechte is, waarvan alle punten in zichzelf overgaan, A een punt buiten m met beeldpunt A′ en P en Q twee punten van m, (die dus in zichzelf overgaan) (fig. 103), dan is volgens stelling 82 PA′ het beeld van PA en QA′ het beeld van QA. Maar dan is $\triangle PQA \cong \triangle PQA'$ volgens geval Z.Z.Z. Als van



twee congruente driehoeken PQA en PQA′ twee paar corresponderende hoekpunten samenvallen, dan zijn er twee mogelijkheden wat betreft het derde paar corresponderende hoekpunten. Deze liggen aan dezelfde kant van m òf ze liggen aan verschillende kanten van m. In het eerste geval vallen die hoekpunten samen, hetgeen betekenen zou, dat A in zichzelf zou overgaan. Dit is in strijd met de definitie van spiegeling. Hieruit blijkt, dat A en A′ aan verschillende kanten van m liggen.

Als R de projectie van A op m is, dan is $\angle R_1 = 90°$. We verbinden nu R met A′. Omdat $\angle R_1$ en $\angle R_2$ corresponderende hoeken zijn bij de verplaatsing, is $\angle R_2 = \angle R_1 = 90°$. $\angle ARA'$ is een gestrekte hoek, of anders gezegd: ARA′ is een rechte lijn, die loodrecht op m staat. Omdat AR en A′R corresponderende lijnen zijn bij de verplaatsing, is AR = A′R. We zien dus:

Stelling 89: **Bij een spiegeling met m als as, gaat ieder punt A van een figuur F over in een punt A′, zodanig, dat m middelloodlijn is van AA′.**

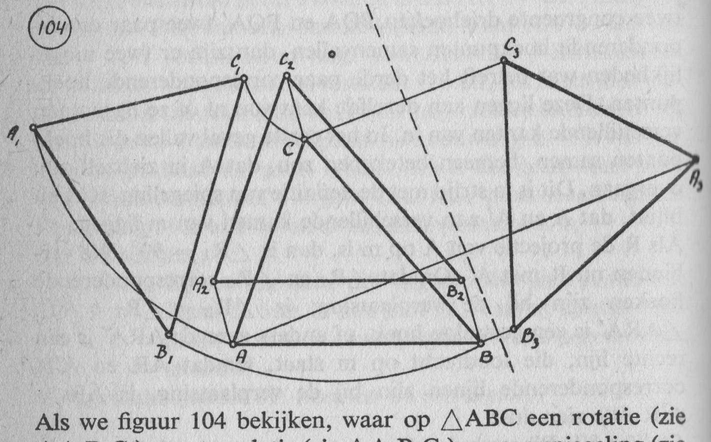
Twee figuren F en F′, die elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van een rechte m, liggen *symmetrisch ten opzichte van m* en de rechte m heet wel de *symmetrie-as* van F en F′.

Als een figuur F bij een spiegeling ten opzichte van m in zichzelf overgaat, dan noemen we zo'n figuur F *symmetrisch* en heeft F de *symmetrie-as* m. (Als een figuur in zichzelf overgaat, betekent dat niet, dat alle punten in zichzelf overgaan, want ze

kunnen ook overgaan in andere punten van F.) Soms heeft een figuur F meer dan één symmetrie-as. Al deze symmetrie-assen snijden elkaar dan in één punt, dat we het *middelpunt* van de figuur F noemen. Voorbeelden van figuren, die een middelpunt hebben, zijn o.a. een rechthoek, een vierkant en een cirkel. Een cirkel heeft een oneindig groot aantal symmetrie-assen, want iedere middellijn van de cirkel is symmetrie-as.

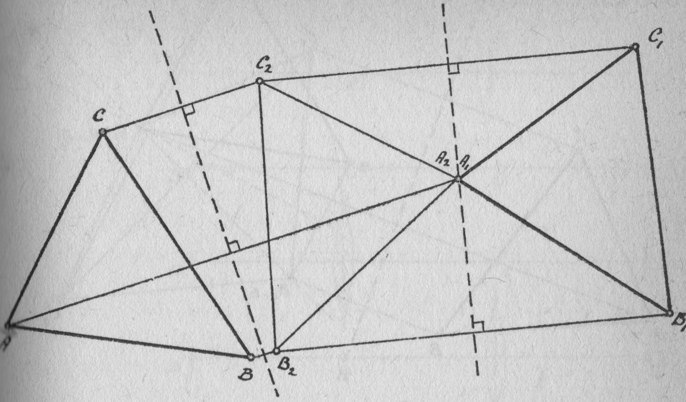
5. *Combinaties van rotaties, translaties en spiegelingen*

In axioma 15 wordt gezegd, dat bij elke twee verplaatsingen U en V een verplaatsing W bestaat, die het produkt is van U en V, dat wil zeggen, dat we twee verplaatsingen U en V, die na elkaar uitgevoerd worden, kunnen vervangen door één verplaatsing W, die hetzelfde resultaat oplevert voor elk punt P, dus WP = V (UP). Met UP bedoelen we het punt, waarin P bij de verplaatsing U overgaat.



Als we figuur 104 bekijken, waar op △ABC een rotatie (zie △$A_1B_1C_1$), een translatie (zie △$A_2B_2C_2$), en een spiegeling (zie △$A_3B_3C_3$) toegepast is, dan blijkt dat de driehoeken $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ dezelfde draaizin hebben als △ABC. Dit betekent, dat als we van A naar B, van B naar C en van C naar A gaan, de draaizin in tegenwijzerrichting is. Bij △$A_3B_3C_3$ is de draaizin in wijzerrichting, dus tegengesteld aan die van △ABC. We noemen de driehoeken ABC, $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ *rechtstreeks congruent*, terwijl de driehoeken ABC en $A_3B_3C_3$ *tegengesteld congruent* zijn, wat we ook wel *symmetrisch* noemen.
We geven nu nog enkele stellingen, die we niet zullen bewijzen.

105



Stelling 90: **Als we twee rechtstreeks of tegengesteld congruente driehoeken hebben, dan kan de ene door ten hoogste drie spiegelingen in de andere overgaan.**

Geval 1: △ABC en △$A_1B_1C_1$ zijn rechtstreeks congruent. (fig. 105)

Allereerst spiegelen we driehoek ABC met de middelloodlijn van AA_1 als as van spiegeling. We krijgen dan △$A_2B_2C_2$, waarbij A_2 samenvalt met A_1. Vervolgens spiegelen we △$A_2B_2C_2$ met de middelloodlijn van B_1B_2 of die van C_1C_2 als as van spiegeling en dan krijgen we △$A_1B_1C_1$.

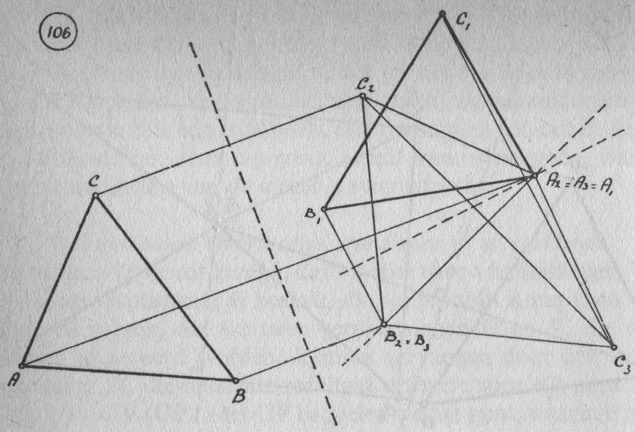
Geval 2: △ABC en △$A_1B_1C_1$ zijn tegengesteld congruent. (fig. 106)

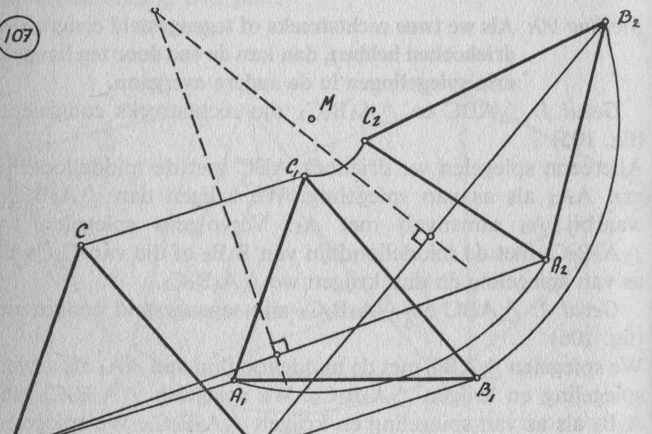
We spiegelen △ABC met de middelloodlijn van AA_1 als as van spiegeling en krijgen △$A_2B_2C_2$. We spiegelen △$A_2B_2C_2$ met A_2B_2 als as van spiegeling en krijgen △$A_3B_3C_3$. We spiegelen △$A_3B_3C_3$ met de middelloodlijn van B_1B_3 of met die van C_1C_3 als as van spiegeling en krijgen dan △$A_1B_1C_1$.

Stelling 91: **Het produkt van een translatie en een rotatie is weer een rotatie, maar met een ander centrum en dezelfde rotatiehoek.**

In figuur 107 is deze situatie in tekening gebracht. △ABC gaat door de translatie (AA_1) over in △$A_1B_1C_1$ en deze gaat door de rotatie (M, ∠B_1MB_2) over in △$A_2B_2C_2$. Als nu O het snijpunt is van de middelloodlijnen van AA_2 en BB_2, dan kan △ABC door de rotatie (O, ∠BOB_2) overgaan in △$A_2B_2C_2$.

Er zijn nog meer combinaties van verplaatsingen. We zullen





daar niet verder op ingaan. De lezer kan zelf trachten na te gaan, wat het produkt is van:

Twee translaties.

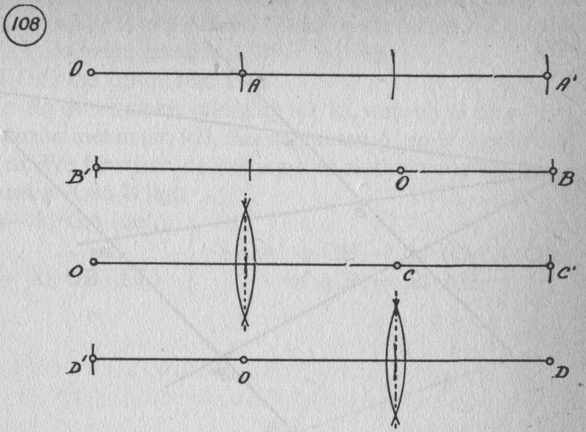
Twee rotaties met al of niet verschillende centra.

Twee spiegelingen met assen, die al of niet evenwijdig zijn.

Een translatie en een spiegeling.

Een rotatie en een spiegeling.

We zijn nu toe aan het tweede geval van de transformaties, namelijk



Definitie: Onder het vermenigvuldigen van een punt P met een factor k vanuit een centrum O verstaan we het bepalen van het punt P', dat op OP ligt, terwijl OP' = |k|·OP. Is k een positief reëel getal, dan liggen P en P' aan dezelfde kant van O en is k een negatief reëel getal, dan liggen P en P' aan verschillende kanten van O. Indien we P' vermenigvuldigen met 1/k vanuit O, dan vinden we punt P weer terug. In figuur 108 zijn de punten A, B, C en D respectievelijk met $+3$, -2, $+1\frac{1}{2}$ en $-\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd vanuit een centrum 0.

Definitie: Onder het vermenigvuldigen van een figuur F met een factor k vanuit O verstaan we het bepalen van de figuur F', die ontstaat als we ieder punt van F met k vermenigvuldigen vanuit O.

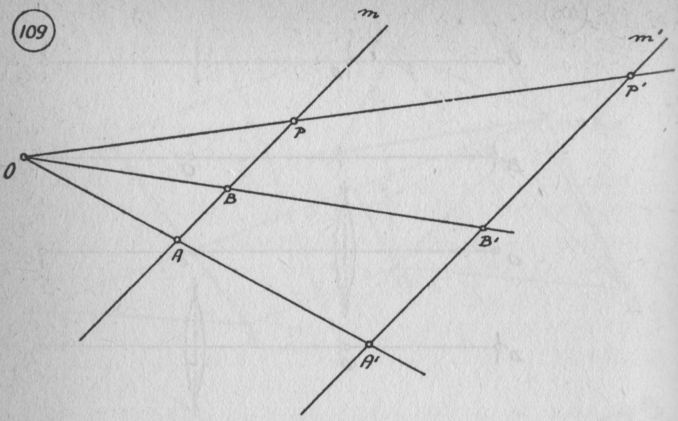
Stelling 92: **Als we een rechte m vermenigvuldigen met een factor k vanuit het centrum O, dan is de produktfiguur van m een rechte m', die samenvalt met m, als O op m ligt en die evenwijdig loopt met m, als O niet op m ligt.**

Geval 1: O ligt op m.

Bewijs: Als we de punten van m gaan vermenigvuldigen met O als centrum, dan zullen al de produktpunten ook op m liggen volgens de definitie van vermenigvuldiging. Bij ieder punt P van m is er een punt P' op m zódanig, dat OP' = |k|·OP en bij ieder punt Q' van m is er een punt Q ook op m zódanig, dat OQ' = |k|·OQ. Ieder punt P van m heeft dus een produkt-

punt P′ op m en ieder punt Q′ van m′ is produk punt van een punt Q van m.

109



Geval 2: O ligt niet op m. (fig. 109)

Bewijs: Stel dat P′ het produktpunt van P is bij de vermenigvuldiging (O,k). Trek door P′ de rechte m′ // m. A is een punt van m. OA snijdt m′ in A′. We bewijzen nu, dat A′ het produktpunt van A is.

$$\left.\begin{array}{r} m \parallel m' \rightarrow OA' : OA = OP' : OP \text{ (st. 65)} \\ |k| = OP' : OP \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow OA' : OA = |k|.$$

Hieruit volgt, dat A′ het produktpunt is van A en dat de produktpunten van alle punten van m op de rechte m′ liggen.

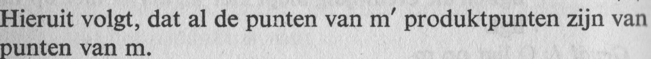
Stel B′ is een punt van m′. OB′ snijdt m in B.

$$\left.\begin{array}{r} m \parallel m' \rightarrow OB' : OB = OP' : OP \text{ (st. 65)} \\ |k| = OP' : OP \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow OB' : OB = |k|.$$

Hieruit volgt, dat al de punten van m′ produktpunten zijn van punten van m.

110



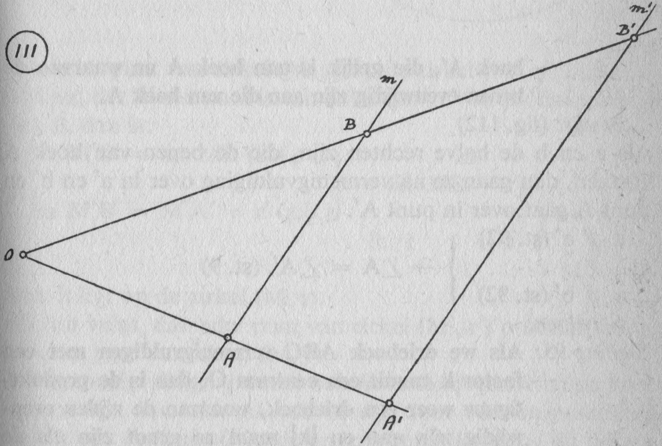
Stelling 93: **Als we een lijnstuk AB vermenigvuldigen met een factor k vanuit het centrum O, dan is de produkt-**

figuur een lijnstuk A′B′, dat op de rechte m door A en B ligt, als O ook op die rechte ligt en dat evenwijdig is met AB, als O niet op die rechte ligt, terwijl in beide gevallen $A'B' = |k| \cdot AB$.

Geval 1: O ligt op m. (fig. 110)

Bewijs: Bij de vermenigvuldiging (O, k), waarbij O op m ligt, valt m′ samen met m (st. 92), dus de punten A′ en B′ liggen dan ook op m. We bewijzen de stelling hier slechts voor het geval dat O tussen A en B ligt.

$$\left.\begin{array}{l} OA' = |k| \cdot OA \text{ (def.)} \\ \\ OB' = |k| \cdot OB \text{ (def.)} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} OA' + OB' = |k| \cdot (OA + OB), \\ \text{of } A'B' = |k| \cdot AB. \end{array}$$



Geval 2: O ligt niet op m. (fig. 111)

Bewijs: Bij de vermenigvuldiging (O, k), waarbij O niet op m ligt, gaat m over in m′ en is m′ // m. De punten A en B gaan over in de punten A′ en B′ en volgens stelling 92 liggen deze op m′. Dus

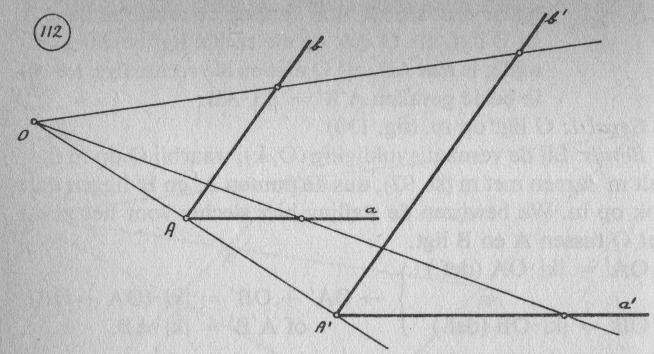
A′B′ // AB.

$$A'B' \,/\!/\, AB \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow A'B' : AB = OA' : OA \text{ (st. 66)} \\ \\ |k| = OA' : OA \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} A'B' : AB = |k|, \text{ of} \\ A'B' = |k| \cdot AB. \end{array}$$

Opmerking: Als k negatief is, ligt O tussen m en m′. Het bewijs gaat dan echter onveranderd door.

Stelling 94: **Als we een hoek A vermenigvuldigen met een factor k vanuit een centrum O, dan is de produktfiguur een**



hoek A′, die gelijk is aan hoek A en waarvan de benen evenwijdig zijn aan die van hoek A.

Bewijs: (fig. 112)

Als a en b de halve rechten zijn, die de benen van hoek A vormen, dan gaan ze na vermenigvuldiging over in a′ en b′ en punt A gaat over in punt A′.

$$\left.\begin{array}{l} a \parallel a' \text{ (st. 92)} \\ \\ a \parallel b' \text{ (st. 92)} \end{array}\right\} \rightarrow \angle A = \angle A'. \text{ (st. 9)}$$

Gevolgen:

Stelling 95: **Als we driehoek ABC vermenigvuldigen met een factor k vanuit een centrum O, dan is de produktfiguur weer een driehoek, waarvan de zijden evenwijdig zijn aan en $|k|$ maal zo groot zijn als de corresponderende zijden van driehoek ABC.**

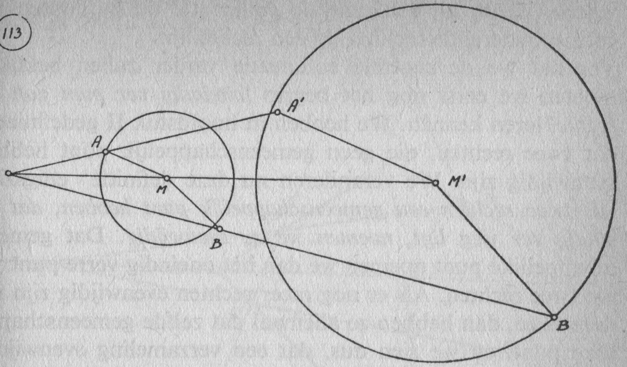
Bewijs: Dit volgt direct uit stelling 93.

Opmerking: Stelling 95 geldt ook voor een veelhoek.

Stelling 96: **Als we een cirkel (M,r) vermenigvuldigen met een factor k vanuit een centrum O, dan is de produktfiguur weer een cirkel en wel (M′,r′), waarbij M′ het produktpunt is van M en $r' = |k| \cdot r$.**

Bewijs: We bewijzen eerst, dat ieder punt van cirkel (M, r) zijn produktpunt op cirkel (M, r) heeft en daarna, dat ieder punt van cirkel (M′, r′) produktpunt is van een punt van cirkel (M, r) (fig. 113). Stel, dat M′ en A′ de produktpunten zijn van M en A. Dan is $A'M' = |k| \cdot AM = |k| \cdot r$ volgens stelling 93. Omdat M′ een vast punt is en A′M′ een constante lengte heeft, indien A de cirkel (M, r) doorloopt, zal dus het produktpunt

113



van ieder punt van cirkel (M, r) op de cirkel (M′, r′) liggen. Stel nu, dat B′ een punt is van cirkel (M′, r′) en produktpunt is van B, dan is:

$$\left.\begin{array}{l} M'B' = |k|\cdot MB \text{ (def.)} \\ \text{en } M'B' = M'A' = r' \text{ (z.b.)}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}|k|\cdot MB = r' \\ |k|\cdot r \quad\;\; = r'\end{array}\right\} \rightarrow MB = r.$$

Dus B ligt op de cirkel (M, r).
Hieruit volgt, dat ieder punt van cirkel (M′, r′) produktpunt is van een punt van cirkel (M, r).
De vermenigvuldiging wordt ook *homothetie* genoemd en twee figuren zijn *homothetisch*, als de ene door vermenigvuldiging vanuit een centrum O in de andere kan overgaan. Bij homothetische figuren lopen corresponderende rechten dus evenwijdig. Onder *homothetische punten* bij een vermenigvuldiging verstaan we corresponderende punten.
Als we het produkt nemen van een vermenigvuldiging en een rotatie, spreken we wel van *draaivermenigvuldiging*.

C. CENTRALE COLLINEATIE

Definitie: Onder een centrale collineatie verstaan we een transformatie, waarbij een rechte een rechte tot beeld heeft, terwijl de verbindingsrechten van corresponderende punten door één punt gaan.
Volgens de *stelling van Desargues*, die we hier niet zullen be-

wijzen, liggen bij een centrale collineatie de snijpunten van corresponderende rechten op een rechte lijn.

Voordat we de centrale collineatie verder zullen bekijken, moeten we eerst nog het begrip '*oneindig ver punt van een rechte*' leren kennen. We hebben in hoofdstuk II gedefinieerd, dat twee rechten, die geen gemeenschappelijk punt hebben, evenwijdig zijn. We veranderen nu deze definitie enigszins: *Als twee rechten een gemeenschappelijk punt hebben, dat oneindig ver weg ligt, noemen we ze evenwijdig.* Dat gemeenschappelijke punt noemen we dan het oneindig verre punt van die twee rechten. Als er nog meer rechten evenwijdig zijn met deze twee, dan hebben ze allemaal dat zelfde gemeenschappelijke punt, en we zien dus, dat een verzameling evenwijdige rechten éénzelfde oneindig ver punt heeft, ook wel het oneigenlijke punt van die rechten genoemd. Het is niet de bedoeling, om aan dit oneindig verre punt van een verzameling evenwijdige rechten, of van één rechte, een bepaalde voorstelling te verbinden. Onze voorstellingen zouden ons namelijk niet één, maar twee oneindig verre punten bij iedere rechte en dus ook bij ieder stel evenwijdige rechten willen opdringen. Dit zou echter in strijd zijn met axioma 1, want als die evenwijdige rechten twee gemeenschappelijke punten zouden hebben, zouden ze moeten samenvallen, wat niet het geval is.

Iedere andere verzameling van evenwijdige rechten heeft dus weer een ander oneindig ver punt. We definiëren nu: Onder de oneindig verre rechte verstaan we de verzameling van oneindig verre punten van het vlak.

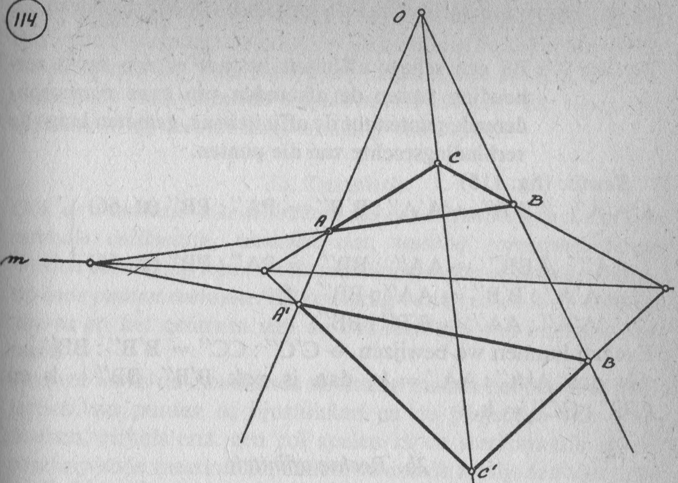
We geven nu een globaal overzicht van de centrale collineatie en de daaruit voortvloeiende bijzondere gevallen:

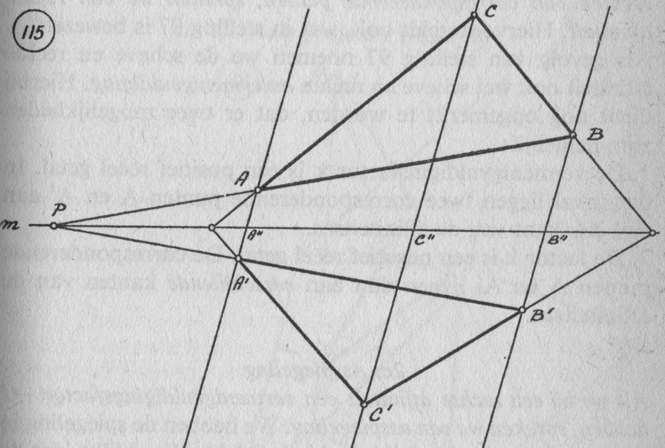
1. Centrale collineatie.
2. Scheve affiniteit.
3. Homothetie.
4. Centrale projectie.

(2–4: Bijzondere gevallen van centrale collineatie.)

1. Centrale Collineatie

In figuur 114 is een centrale collineatie getekend. De driehoeken ABC en A'B'C' noemen we *homoloog*. Corresponderende punten noemen we hier *homologe punten* en hetzelfde geldt voor corresponderende rechten. Het punt O heet het *centrum* van de collineatie en de rechte m is de *collineatie-as*.





2a. *Scheve affiniteit*

Definitie: Een scheve affiniteit is een centrale collineatie, waarbij het centrum een oneindig ver punt is.

In figuur 115 zien we een *scheve affiniteit*. Het bijzondere is hier, dat het centrum O oneindig ver weg ligt, d.w.z., dat de verbindingsrechten van corresponderende punten evenwijdig

lopen. De rechte m heet nu de *affiniteits-as*. We bewijzen nu eerst:

Stelling 97: **Bij een scheve affiniteit bestaat er een vaste verhouding tussen de afstanden van twee corresponderende punten tot de affiniteitsas, gemeten langs de verbindingsrechte van die punten.**

Bewijs: (fig. 115)

$$\left.\begin{array}{l} A'A'' \,/\!/\, B'B'' \rightarrow A'A'' : B'B'' = PA'' : PB'' \text{ (st. 66)} \\ \\ AA'' \,/\!/\, BB'' \rightarrow AA'' : BB'' = PA'' : PB'' \text{ (st. 66)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow A'A'' : B'B'' = AA'' : BB''$, of

$A'A'' : AA'' = B'B'' : BB''$.

Evenzo kunnen we bewijzen $\rightarrow C'C'' : CC'' = B'B'' : BB''$.
Als dus $A'A'' : AA'' = k$, dan is ook $B'B'' : BB'' = k$ en $C'C'' : CC'' = k$.

2b. Rechte affiniteit

In het geval, dat de affiniteitsas loodrecht staat op de verbindingsrechten van corresponderende punten, spreken we van rechte affiniteit. Hiervoor geldt ook, wat in stelling 97 is bewezen.
Als gevolg van stelling 97 noemen we de scheve en rechte affiniteit ook wel scheve en rechte *asvermenigvuldiging*. Hierbij dient nog opgemerkt te worden, dat er twee mogelijkheden zijn, namelijk:

1. De vermenigvuldiginsfactor k is een positief reëel getal. In dat geval liggen twee corresponderende punten A en A′ aan *dezelfde* kant van de affiniteitsas.
2. De factor k is een negatief reëel getal. De corresponderende punten A en A′ liggen dan aan *verschillende* kanten van de affiniteitsas.

2c. Asspiegeling

Als we bij een rechte affiniteit een vermenigvuldigingsfactor —1 hebben, spreken we van asspiegeling. We hebben de spiegeling in één van de vorige bladzijden al behandeld. Hier blijkt, dat de spiegeling als een bijzonder geval van een centrale collineatie is op te vatten. De lezer kan zelf nagaan, of de hier genoemde spiegeling dezelfde is, als die van enige bladzijden terug.

3a. Homothetie

De homothetie is te definiëren als een bijzonder geval van een centrale collineatie, namelijk dat, waarbij corresponderende rechten

evenwijdig lopen. Twee corresponderende rechten snijden elkaar dus in een oneindig ver punt, en de oneindig verre rechte is dus collineatieas. De lezer kan weer nagaan, dat we met dit uitgangspunt toch dezelfde transformatie krijgen, die reeds besproken is bij de vermenigvuldiging van figuren.

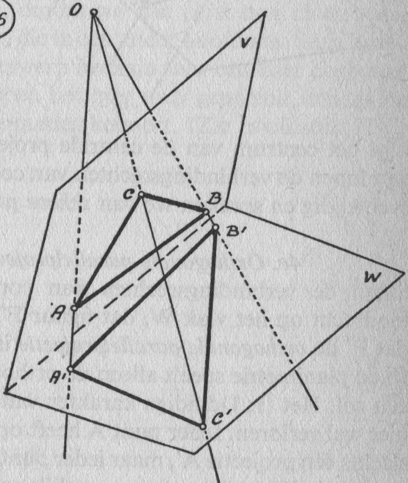
3b. Translatie

Ook de translatie is te definiëren als een bijzonder geval van een centrale collineatie, namelijk dat, waarbij corresponderende rechten evenwijdig lopen en de verbindingsrechten van corresponderende punten eveneens. De oneindig verre rechte is de collineatie-as en het centrum van de collineatie is een oneindig ver punt.

Hoewel we in de meetkunde slechts te maken hebben met projecties van punten of lijnstukken en de projecties van driehoeken, cirkels enz. een rol spelen in de stereometrie en de beschrijvende meetkunde, zullen we enkele methoden van projecties noemen.

4a. Centrale projectie (fig. 116)

116

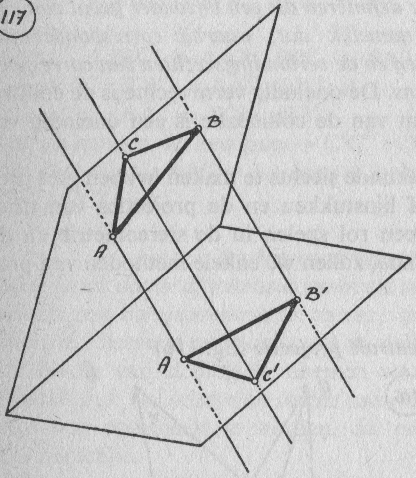


In de stereometrie spreken we o.a. van centrale projectie, als twee figuren F en F′ in twee verschillende vlakken V en W liggen, terwijl de verbindingsrechten van corresponderende punten door één punt gaan. Daarbij snijden corresponderende rechten elkaar

op de snijlijn van de vlakken V en W. Zijn de vlakken V en W evenwijdig, dan lopen ook corresponderende rechten evenwijdig en kunnen we spreken van vermenigvuldiging in de ruimte.

4b. Scheve parallelprojectie (fig. 117)

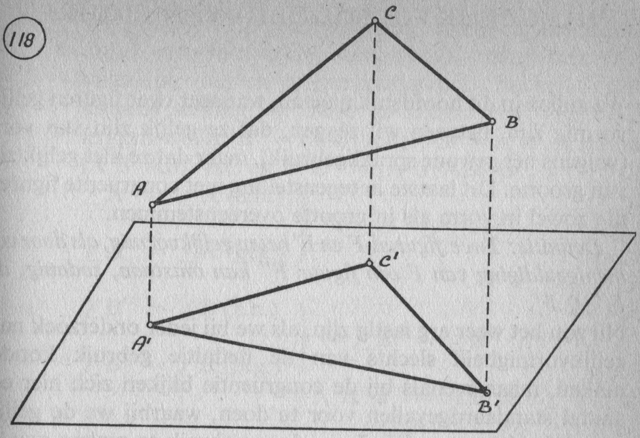
117



Ligt het centrum van de centrale projectie oneindig ver weg, dan lopen de verbindingsrechten van corresponderende punten evenwijdig en spreken we van *scheve parallelprojectie.*

4c. Orthogonale parallelprojectie (fig. 118)

Staan de verbindingsrechten van corresponderende punten loodrecht op het vlak W, dat figuur F′ bevat, dan zeggen we, dat F′ de *orthogonale parallelprojectie* is van F op het vlak W. In de planimetrie speelt alleen de orthogonale parallelprojectie een rol. Het (1, 1)duidige karakter van de transformaties gaat hier wel verloren. Ieder punt A heeft op een bepaalde rechte m slechts één projectie A′, maar ieder punt B′ van m is de projectie van oneindig veel punten, namelijk van al de punten van de loodlijn in B′ op m. Omdat we ons alleen met (1, 1)duidige transformaties hebben bezig gehouden, is het beter de projectie daar maar buiten te houden en als afzonderlijk onderwerp te behandelen.



D. INVERSIE

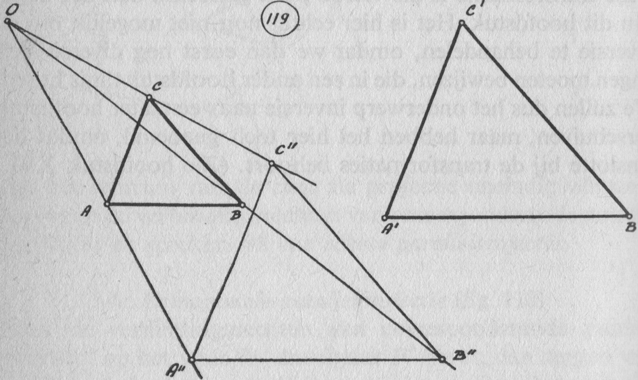
Deze transformatie is als vierde punt genoemd aan het begin van dit hoofdstuk. Het is hier echter nog niet mogelijk om de inversie te behandelen, omdat we dan eerst nog diverse stellingen moeten bewijzen, die in een ander hoofdstuk thuis horen. We zullen dus het onderwerp inversie naar een later hoofdstuk verschuiven, maar hebben het hier toch genoemd, omdat het tenslotte bij de transformaties behoort. (Zie hoofdstuk XVI.)

VIII. GELIJKVORMIGHEID VAN FIGUREN

We zullen in dit hoofdstuk nagaan, wanneer twee figuren gelijkvormig zijn, hetgeen wil zeggen, dat ze gelijk zijn van vorm (volgens het gewone spraakgebruik), maar dat ze niet gelijk zijn van grootte. Dit laatste in tegenstelling met congruente figuren, die zowel in vorm als in grootte overeenstemmen.

Definitie: Twee figuren F en F' heten gelijkvormig, als door vermenigvuldiging van F een figuur F'' kan ontstaan, zodanig, dat F'' ≌ F'.

Nu zou het weer erg lastig zijn, als we bij ieder onderzoek naar gelijkvormigheid slechts van de definitie gebruik konden maken, maar evenals bij de congruentie blijken zich hier een aantal standaardgevallen voor te doen, waarbij we de gelijkvormigheid kunnen bewijzen, door gebruik te maken van de definitie. Daarna kunnen we om gelijkvormigheid aan te tonen steeds van deze standaardgevallen gebruik maken.



Stelling 98: **Als twee driehoeken twee hoeken gelijk hebben, dan zijn ze gelijkvormig.** Geval h.h.

Gegeven: △ABC, △A'B'C', ∠A = ∠A', ∠B = ∠B'. (fig. 119)

Te bew.: △ABC ~ △A'B'C'.

Bewijs: Vanuit een willekeurig centrum O gaan we △ABC vermenigvuldigen. Als vermenigvuldigingsfactor nemen we k = A'B'/AB, hetgeen altijd mogelijk is, daar we

vroeger reeds hebben bewezen, dat twee lijnstukken altijd een verhouding hebben. Bij deze vermenigvuldiging blijven corresponderende hoeken gelijk volgens stelling 94. Voor de zijden van $\triangle A''B''C''$ krijgen we, $A''B'' = (A'B'/AB) \cdot AB = A'B'$, $A''C'' = (A'B'/AB) \cdot AC$ en $B''C'' = (A'B'/AB) \cdot BC$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle A'' = \angle A \text{ (z.b.)} \\ \angle A' = \angle A \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle A'' = \angle A' \\ \left.\begin{array}{l}\angle B'' = \angle B \text{ (z.b.)} \\ \angle B' = \angle B \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle B'' = \angle B' \\ \qquad\qquad\qquad A''B'' = A'B' \text{ (z.b.)}\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \triangle A''B''C'' \cong \triangle A'B'C'.$$

geval H.Z.H.

We kunnen dus $\triangle ABC$ zó vermenigvuldigen, dat de produktfiguur $\triangle A''B''C''$ congruent is met $\triangle A'B'C'$ en volgens de definitie van gelijkvormigheid zijn dan de driehoeken ABC en $A'B'C'$ gelijkvormig.

Stelling 99: **Als twee driehoeken een hoek gelijk hebben en de zijden om die hoek evenredig zijn, dan zijn die driehoeken gelijkvormig.** Geval z.h.z.

Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$, $\angle A = \angle A'$, $A'C' : AC = A'B' : AB$. (fig. 119)

Te bew.: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Bewijs: We vermenigvuldigen $\triangle ABC$ vanuit een willekeurig centrum O, met een factor $A'B'/AB$. Bij deze vermenigvuldiging blijven corresponderende hoeken gelijk, volgens stelling 94. Voor de zijden van driehoek $A''B''C''$ krijgen we: $A''B'' = (A'B'/AB) \cdot AB = A'B'$, $A''C'' = (A'B'/AB) \cdot AC$, maar omdat $A'C'/AC = A'B'/AB$ (geg.), is dus $A''C'' = (A'C'/AC) \cdot AC = A'C'$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle A'' = \angle A \text{ (z.b.)} \\ \angle A' = \angle A \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle A'' = \angle A' \\ \qquad\qquad\qquad A''B'' = A'B' \text{ (z.b.)} \\ \qquad\qquad\qquad A''C'' = A'C' \text{ (z.b.)}\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \triangle A''B''C'' \cong \triangle A'B'C'.$$

geval Z.H.Z.

We kunnen dus $\triangle ABC$ zó vermenigvuldigen, dat de produktfiguur $\triangle A''B''C''$ congruent is met $\triangle A'B'C'$ en volgens de definitie van gelijkvormigheid zijn dan de driehoeken ABC en A'B'C' gelijkvormig.

Stelling 100: **Als de zijden van een driehoek evenredig zijn met de zijden van een andere driehoek, dan zijn die driehoeken gelijkvormig.** Geval z.z.z.

Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$, $A'B' : AB = A'C' : AC = B'C' : BC$. (fig. 119)

Te bew.: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Bewijs: We vermenigvuldigen $\triangle ABC$ vanuit een willekeurig centrum O, met een factor $A'B'/AB$. Voor de zijden van driehoek ABC krijgen we dan: $A''B'' = (A'B'/AB) \cdot AB = A'B'$, $A''C'' = (A'B'/AB) \cdot AC$, maar omdat $(A'C'/AC) = (A'B'/AB)$ (geg.), is dus $A''C'' = (A'C'/AC) \cdot AC = A'C'$, $B''C'' = (A'B'/AB) \cdot BC$, maar omdat $(B'C'/BC) = (A'B'/AB)$ (geg.), is dus $B''C'' = (B'C'/BC) \cdot BC = B'C'$.

$$\left.\begin{aligned} A''B'' &= A'B' \text{ (z.b.)} \\ A''C'' &= A'C' \text{ (z.b.)} \\ B''C'' &= B'C' \text{ (z.b.)} \end{aligned}\right\} \rightarrow \triangle A''B''C'' \cong \triangle A'B'C'. \text{ geval Z.Z.Z.}$$

We kunnen dus $\triangle ABC$ zó vermenigvuldigen, dat de produktfiguur $\triangle A''B''C''$ congruent is met $\triangle A'B'C'$ en volgens de definitie van gelijkvormigheid zijn de driehoeken ABC en A'B'C' gelijkvormig.

Stelling 101: **Als van twee driehoeken twee paar zijden evenredig zijn en de hoeken tegenover het ene paar zijden gelijk zijn, terwijl de hoeken tegenover het andere paar van dezelfde soort zijn, dan zijn die driehoeken gelijkvormig.** Geval z.z.h.

Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$, $A'C' : AC = B'C' : BC$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B$ en $\angle B'$ zijn van dezelfde soort. (fig. 119)

Te bew.: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Bewijs: We vermenigvuldigen $\triangle ABC$ vanuit een willekeurig centrum O, met een factor $A'C'/AC$. Bij deze vermenigvuldiging blijven corresponderende hoeken gelijk, volgens stelling 94. Voor de zijden van driehoek $A''B''C''$ krijgen we: $A''C'' = (A'C'/AC) \cdot AC = A'C'$, $B''C'' = (A'C'/AC) \cdot BC$, maar omdat $(B'C'/BC) = (A'C'/AC)$ (geg.), is $B''C'' = (B'C'/BC) \cdot BC = B'C'$.

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l}\angle A''=\angle A\ (\text{z.b.})\\ \angle A'=\angle A\ (\text{geg.})\end{array}\right\}\rightarrow \angle A''=\angle A' \\ A''C''=A'C'\ (\text{z.b.})\\ B''C''=B'C'\ (\text{z.b.})\\ \angle B''=\angle B\ (\text{z.b.}),\ \text{dus } \angle B'' \text{ en } \angle B' \text{ zijn van}\\ \text{dezelfde soort}\end{array}\right\}\rightarrow$$

$$\rightarrow \triangle A''B''C'' \cong \triangle A'B'C'.\ \text{Geval Z.Z.H.}$$

We kunnen dus $\triangle ABC$ zó vermenigvuldigen, dat de produktfiguur $\triangle A''B''C''$ congruent is met $\triangle A'B'C'$ en volgens de definitie van gelijkvormigheid zijn dan de driehoeken ABC en $A'B'C'$ gelijkvormig.

We kunnen vaak met voordeel gebruik maken van het feit, dat twee driehoeken gelijkvormig zijn. Immers volgens de definitie is de ene driehoek congruent met een produktfiguur van de andere. Dat betekent dus, dat de zijden van de ene driehoek $|k|$ maal zo groot zijn als de corresponderende zijden van de andere driehoek, of anders gezegd: de zijden van de ene driehoek zijn evenredig met de corresponderende zijden van de andere driehoek. Corresponderende hoeken van beide driehoeken zijn gelijk. Voor corresponderende lijnstukken *in* de driehoek geldt hetzelfde, als voor de zijden. Ze zijn dus evenredig met corresponderende zijden.

Twee driehoeken die *homothetisch* zijn, zijn ook gelijkvormig, hetgeen volgt uit de definitie van gelijkvormigheid.

Twee driehoeken, die *gelijkvormig* zijn, behoeven nog niet homothetisch te zijn. Dat zal alleen het geval zijn, als corresponderende zijden van beide driehoeken evenwijdig zijn.

Evenals bij de congruentie kunnen we met behulp van gelijkvormigheid een groot aantal stellingen bewijzen en opgaven oplossen.

IX. MEETKUNDIGE PLAATSEN

Als we een cirkel (M, 2 cm) tekenen, dan geldt voor alle punten van de cirkel, dat ze 2 cm van M verwijderd zijn (def.). We zouden de vraag kunnen stellen, of er behalve de punten van de cirkel nog andere punten bestaan, die 2 cm van M afliggen. Iedereen zal na enige ogenblikken tot de conclusie komen, dat dat niet het geval is. Alle punten op de cirkel liggen 2 cm van M af en alle punten, die niet op de cirkel liggen, liggen meer of minder dan 2 cm van M af. De punten van de cirkel nemen dus een uitzonderingspositie in temidden van alle mogelijke andere punten. Zij hebben de eigenschap, dat ze 2 cm van M verwijderd zijn en bovendien zijn zij de enige, die die eigenschap hebben. We zeggen nu, dat de cirkel (M, 2 cm) de *meetkundige plaats* is van de punten, die 2 cm van M verwijderd zijn. Na dit voorbeeld van een meetkundige plaats geven we de definitie.

Definitie: Een meetkundige plaats is een figuur F, die aan de volgende voorwaarden voldoet:
1. Alle punten van F hebben een bepaalde eigenschap.
2. Alle punten, die die eigenschap hebben, behoren tot F.

Het begrip 'meetkundige plaats' houdt dus volgens de definitie in dat er *alle* punten toebehoren met een bepaalde eigenschap. Een meetkundige plaats is dus een verzameling van punten.

We zullen nu enige meetkundige plaatsen onderzoeken.

Stelling 102: **De meetkundige plaats van de punten, die op gelijke afstand liggen van twee gegeven punten P en Q, is de middelloodlijn van lijnstuk PQ.**

Bewijs: We moeten dus twee dingen aantonen:

1. Voor ieder punt A van de middelloodlijn van PQ geldt, dat AP = AQ.
2. Ieder punt B, waarvoor geldt, dat BP = BQ, ligt op de middelloodlijn van PQ.

Deel 1:

Gegeven: m is de middelloodlijn van PQ, A op m. (fig. 120)

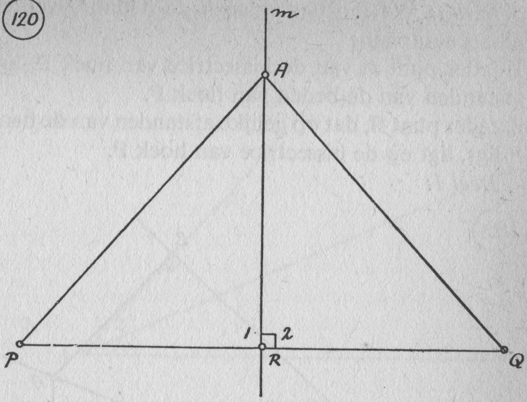
Te bew.: AP = AQ.

Bewijs: m is de middelloodlijn van PQ, dus $\angle R = 90°$ en PR = QR.

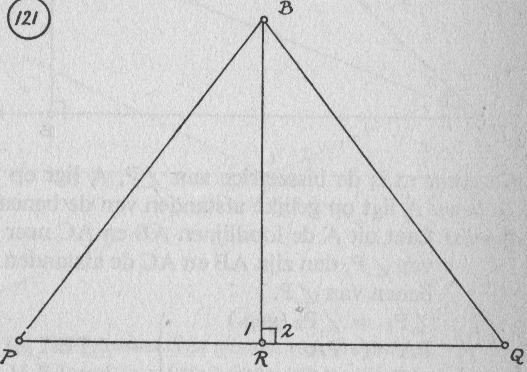
$$\left.\begin{array}{l}\angle R_1 = \angle R_2 = 90° \text{ (z.b.)}\\ PR \;= QR \text{ (z.b.)}\\ AR \;= AR\end{array}\right\} \rightarrow \triangle PRA \cong \triangle QRA \rightarrow \text{geval Z.H.Z.}$$

$$\rightarrow AP = AQ.$$

(120)



(121)



Deel 2:

Gegeven: BP = BQ. (fig. 121)

Te bew.: B ligt op de middelloodlijn van PQ.

Bewijs: Laat uit B de loodlijn BR neer op PQ, dus

$\angle R_1 = \angle R_2 = 90°$ (z.b.)
BR = BR
BP = BQ (geg.)
} → △PRB ≌ △QRB → geval Z.Z.R.
→ PR = QR.

Maar als $\angle R = 90°$ en PR = QR, is BR dus middelloodlijn van PQ en ligt B dus op deze middelloodlijn.

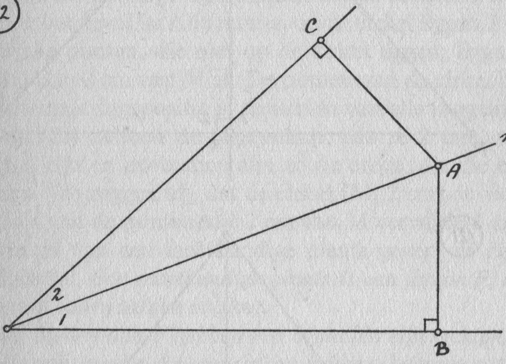
Stelling 103: **De meetkundige plaats van de punten, die op gelijke afstand liggen van de benen van een hoek P, is de bissectrice van hoek P.**

Bewijs: We moeten volgens de definitie van meetkundige plaats aantonen:

1. Ieder punt A van de bissectrice van hoek P, ligt op gelijke afstanden van de benen van hoek P.
2. Ieder punt B, dat op gelijke afstanden van de benen van hoek P ligt, ligt op de bissectrice van hoek P.

Deel 1:

122



Gegeven: m is de bissectrice van $\angle P$, A ligt op m. (fig. 122)

Te bew.: A ligt op gelijke afstanden van de benen van $\angle P$.

Bewijs: Laat uit A de loodlijnen AB en AC neer op de benen van $\angle P$, dan zijn AB en AC de afstanden van A tot de benen van $\angle P$.

$$\left.\begin{array}{l}\angle P_1 = \angle P_2 \text{ (geg.)}\\ PA = PA\\ \angle B = \angle C = 90^\circ \text{ (z.b.)}\end{array}\right\} \rightarrow \triangle PBA \cong \triangle PCA \rightarrow \text{ geval Z.H.H.} \rightarrow AB = AC.$$

Deel 2:

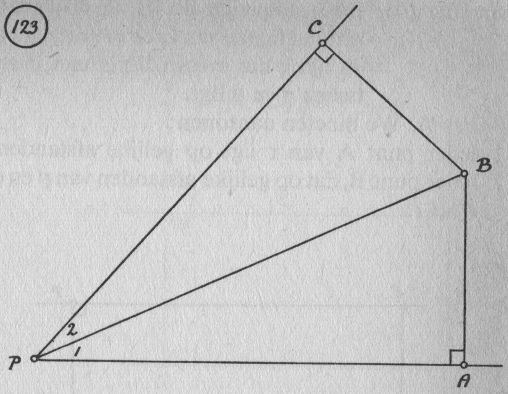
Gegeven: B ligt op gelijke afstanden van de benen van $\angle P$. (fig. 123)

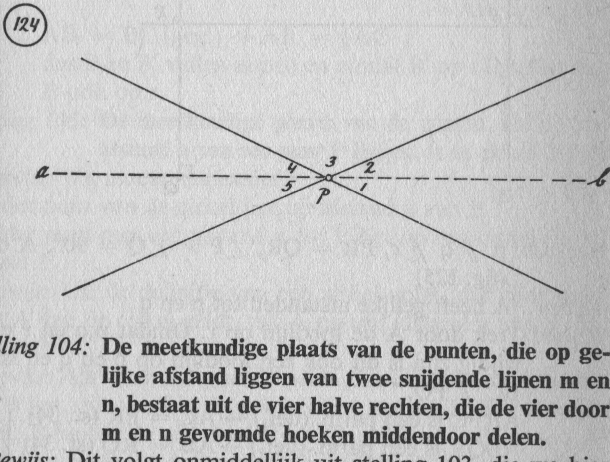
Te bew.: B ligt op de bissectrice van hoek P.

Bewijs: Als BA en BC de loodlijnen uit B op de benen van $\angle P$ zijn, hebben we:

$$\left.\begin{array}{l}BC = BA \text{ (geg.)}\\ \angle A = \angle C = 90^\circ \text{ (z.b.)}\\ PB = PB\end{array}\right\} \rightarrow \triangle PCB \cong \triangle PAB \rightarrow \text{ geval Z.Z.R.} \rightarrow \angle P_1 = \angle P_2.$$

Dus BP is de bissectrice van $\angle P$ en B ligt dus op deze bissectrice.





Stelling 104: **De meetkundige plaats van de punten, die op gelijke afstand liggen van twee snijdende lijnen m en n, bestaat uit de vier halve rechten, die de vier door m en n gevormde hoeken middendoor delen.**

Bewijs: Dit volgt onmiddellijk uit stelling 103, die we hier vier keer kunnen toepassen. Deze vier halve rechten liggen twee aan twee in elkaars verlengde en vormen dus twee rechten. We zullen dit bewijzen voor twee van die halve rechten. (fig. 124)

$$\left.\begin{array}{l}\angle P_1 = \angle P_2 \rightarrow \angle P_2 = \tfrac{1}{2}\angle P_{1,2} \\ \angle P_4 = \angle P_5 \rightarrow \angle P_5 = \tfrac{1}{2}\angle P_{4,5} \\ \qquad\qquad \angle P_{1,2} = \angle P_{4,5} \text{ (overstaande hk)}\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow \angle P_2 \quad = \angle P_5 \\ \\ \angle P_{3,4,5} \quad = 180^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \angle P_{2,3,4} = 180^\circ,$$

dus b en a liggen in elkaars verlengde.

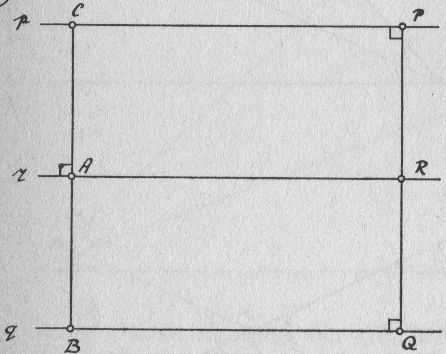
Stelling 105: **De meetkundige plaats van de punten die op gelijke afstand liggen van twee evenwijdige lijnen p en q, is de lijn r die evenwijdig is met p en q en midden tussen p en q ligt.**

Bewijs: We moeten aantonen:

1. Ieder punt A van r ligt op gelijke afstanden van p en q.
2. Ieder punt B, dat op gelijke afstanden van p en q ligt, ligt op r.

Deel 1:

125



Gegeven: p // q // r, PR = QR, ∠P = ∠Q = 90°, A op r. (fig. 125)

Te bew.: A heeft gelijke afstanden tot p en q.

Bewijs: Trek door A de loodlijn op r. Omdat p,q en r evenwijdig zijn is dit ook een loodlijn op p en q en is dus BC // PQ.

ARPC is een parm. (def.) → AC = PR (st. 34)
ABQR is een parm. (def.) → AB = RQ (st. 34)
PR = RQ (geg.)
} →

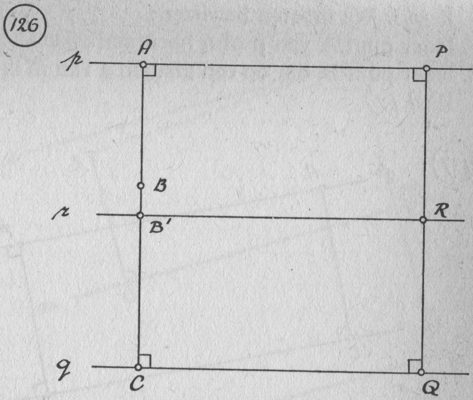
→ AC = AB

Deel 2:

Gegeven: p // q // r, ∠P = ∠Q = ∠A = ∠C = 90°, PR = QR, AB = BC. (fig. 126)

Te bew.: B op r.

Bewijs: Als B niet op r zou liggen, zou r lijnstuk AC snijden in een punt B′ en wel zodanig, dat



$$\left.\begin{array}{ll} AB' = B'C & \rightarrow AB' = \tfrac{1}{2}AC \\ AB = BC \text{ (geg.)} & \rightarrow AB = \tfrac{1}{2}AC \end{array}\right\} \rightarrow AB' = AB,$$

dus B en B′ vallen samen en omdat B′ op r ligt, ligt dus B ook op r.

Stelling 106: **De meetkundige plaats van de punten, die op een afstand a van een punt P liggen, is de cirkel (P, a).**

Bewijs: We moeten aantonen:

1. Ieder punt van de cirkel ligt op afstand a van P.
2. Ieder punt met een afstand a tot P ligt op een cirkel (P, a).

Deel 1:

Bewijs: Uit de definitie van een cirkel volgt, dat voor ieder punt A van de cirkel geldt, dat A op een afstand a van P ligt.

Deel 2:

Bewijs: Als voor een punt B geldt, dat het op een afstand a van P ligt, zijn er drie mogelijkheden, namelijk B binnen de cirkel, B buiten de cirkel of B op de cirkel. Als B binnen de cirkel ligt, betekent dat, zoals in hoofdstuk VI gedefinieerd is, dat de afstand van B tot P kleiner is dan de straal a, wat niet het geval is. Als B buiten de cirkel ligt, betekent dat, dat de afstand van B tot P groter is dan de straal a en ook dat is niet het geval. Zo blijft dus alleen de mogelijkheid over, dat B op de cirkel ligt.

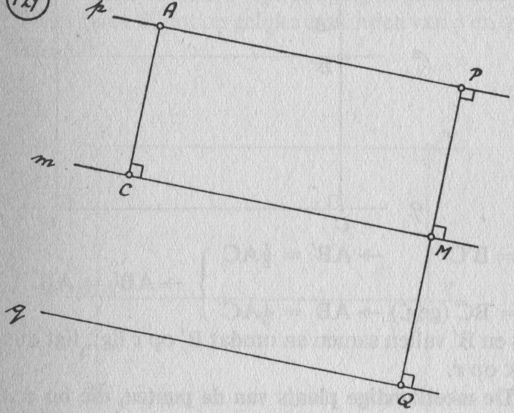
Stelling 107: **De meetkundige plaats van de punten, die op een afstand a van een rechte m liggen, bestaat uit twee rechten p en q, die evenwijdig zijn met m zodanig, dat m tussen p en q ligt en die een afstand a tot m hebben.**

Bewijs: We moeten bewijzen:

1. Ieder punt A van p of q heeft een afstand a tot m.
2. Ieder punt B, dat op een afstand a van m ligt, ligt op p of q.

Deel 1:

(127)



Gegeven: p // q // m, $\angle P = \angle Q = \angle M = 90°$, PM = QM = a. (fig. 127)

Te bew.: A ligt op een afstand a van m.

Bewijs: Laat uit A de loodlijn AC op m neer.

$\left.\begin{array}{r} \angle C = \angle M = 90° \text{ (geg.)} \rightarrow AC \ /\!/ \ PM \text{ (st. 6)} \\ p \ /\!/ \ m \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\left.\begin{array}{r} \rightarrow CMPA \text{ is een parm. (def.)} \rightarrow AC = PM \text{ (st. 35)} \\ PM = a \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow AC = a.$

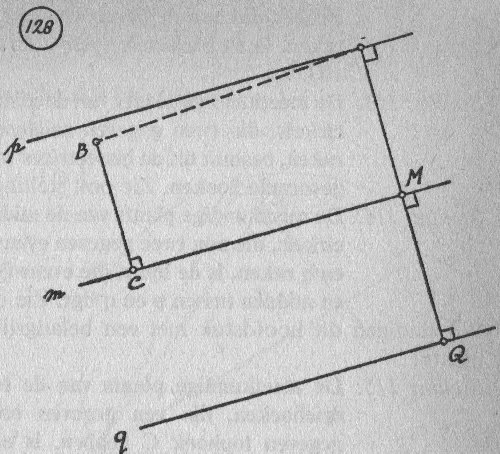
Deel 2:

Gegeven: p // q // m, $\angle P = \angle M = \angle Q = 90°$, PM = QM = a, BC = a. (fig. 128)

Te bew.: B op a.

Bewijs: Laat uit B de loodlijn op m neer en verbindt B met P.

$\left.\begin{array}{l} \angle C = \angle M = 90° \rightarrow BC \ /\!/ \ PM \text{ (st. 6)} \\ \left.\begin{array}{l} BC = a \text{ (geg.)} \\ PM = a \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow BC = PM \end{array}\right\} \rightarrow$



→ CMBP is een parm. (st. 40) → BP // m (def.)
p // m (geg.) } →
→ BP // p,

maar omdat PB en p het punt P gemeenschappelijk hebben, vallen ze samen en ligt B dus op p.

We zullen nu nog enkele meetkundige plaatsen noemen, die de lezer zelf kan trachten te bewijzen.

Stelling 108: **De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels met een gegeven straal r, die door een gegeven punt P gaan, is de cirkel (P, r).** Zie ook stelling 106.

Stelling 109: **De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels met een gegeven straal r, die aan een gegeven rechte m raken, bestaat uit twee rechten p en q, die evenwijdig met m zijn en die een afstand r tot m hebben, terwijl m tussen p en q ligt.** Zie ook stelling 107.

Stelling 110: **De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels die in een gegeven punt A aan een rechte m raken, is de loodlijn door A op m.**

Stelling 111: **De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die door twee gegeven punten P en Q gaan, is de middelloodlijn van PQ.** Zie ook stelling 102.

Stelling 112: **De meetkundige plaats van de middelpunten van de**

cirkels, die aan de benen van een gegeven hoek P raken, is de bissectrice van ∠P. Zie ook stelling 103.

Stelling 113: **De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die twee gegeven snijdende lijnen p en q raken, bestaat uit de bissectrices van de door p en q gevormde hoeken.** Zie ook stelling 104.

Stelling 114: **De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die aan twee gegeven evenwijdige rechten p en q raken, is de lijn r, die evenwijdig is met p en q en midden tussen p en q ligt.** Zie ook stelling 105.

We eindigen dit hoofdstuk met een belangrijke meetkundige plaats:

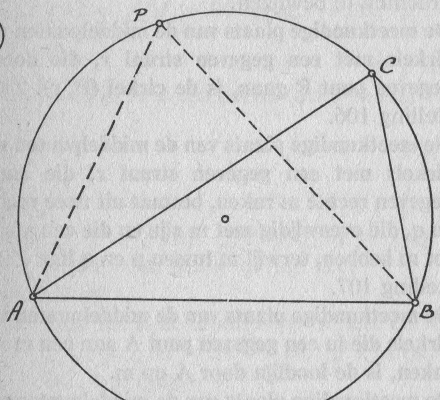
Stelling 115: **De meetkundige plaats van de toppen C van de driehoeken, die een gegeven basis AB en een gegeven tophoek C hebben, is een deel van een cirkel die door A en B gaat.**

We moeten bewijzen:

1. Ieder punt P van die cirkelboog is hoekpunt van een hoek APB, die gelijk is aan hoek C.
2. Ieder punt Q, waarvoor ∠AQB = ∠C is, ligt op die cirkelboog.

Deel 1:

129

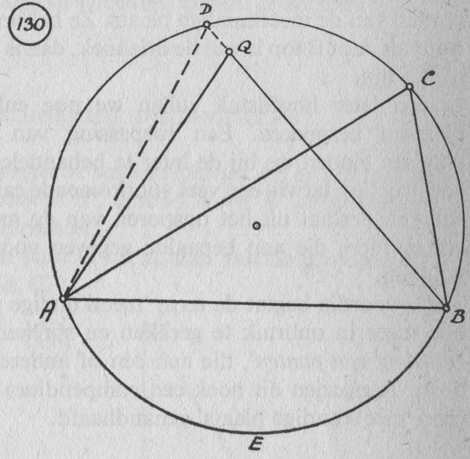


Gegeven: △ABC met een cirkel, die door A, B en C gaat; P op de cirkel; P en C aan dezelfde kant van AB. (fig. 129)

Te bew.: $\angle P = \angle C$.

Bewijs: $\left.\begin{array}{l}\angle C = \frac{1}{2} \text{ bg AB (st. 73)} \\ \angle P = \frac{1}{2} \text{ bg AB (st. 73)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle P = \angle C.$

Deel 2:



Gegeven: $\triangle$ABC met een cirkel, die door A, B en C gaat; $\angle$AQB = $\angle$C. (fig. 130)

Te bew.: Q ligt op bg ACB.

Bewijs: Er zijn drie mogelijkheden, namelijk Q ligt *binnen*, òf Q ligt *buiten*, òf Q ligt *op* de cirkel.

Als Q binnen de cirkel ligt, dan snijdt BQ de cirkel in D.

$\left.\begin{array}{l}\angle ADB = \frac{1}{2} \text{ bg AB (st. 73)} \\ \angle C \quad = \frac{1}{2} \text{ bg AB (st. 73)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle ADB = \angle C.$

Maar $\angle$AQB is buitenhoek van $\triangle$AQD, dus $\angle$AQB = $\angle$ADB + $\angle$DAQ,

$\left.\begin{array}{l}\text{of } \angle AQB > \angle ADB \\ \quad \angle C = \angle ADB \text{ (z.b.)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle AQB > \angle C,$

hetgeen in strijd is met het gegeven, dat $\angle$AQB = $\angle$C.
Dus Q ligt niet binnen de cirkel.

Op dezelfde manier kunnen we bewijzen, dat $\angle$AQB < $\angle$C is, als Q buiten de cirkel ligt en BQ de cirkel in D snijdt. Maar ook dat is in strijd met het gegeven, dat $\angle$AQB = $\angle$C, dus Q ligt niet buiten de cirkel.

Nu blijft alleen de mogelijkheid over, dat Q op de cirkel ligt en wel op de cirkelboog ACB.

Opmerking: Als P een punt is van bg AEB, dan is $\angle$APB = $\frac{1}{2}$ bg ACB, terwijl $\angle$C = $\frac{1}{2}$ bg AEB. Omdat bg ACB en bg AEB in het algemeen ongelijk zijn, zal bg AEB niet tot de meetkundige plaats behoren. De punten A en B zijn de grenspunten van de meetkundige plaats. Ze behoren er zelf niet toe, want als A of B top is van de driehoek, dan is die ontaard in een rechte lijn.

In een later hoofdstuk zullen we nog enkele meetkundige plaatsen bespreken. Een toepassing van de meetkundige plaatsen vinden we bij de later te behandelen werkstukken of constructies, terwijl een veel voorkomende categorie van vraagstukken bestaat uit het opsporen van de meetkundige plaats van punten, die aan bepaalde gegeven voorwaarden moeten voldoen.

Tegenwoordig begint de term 'meetkundige plaats' hoe langer hoe meer in onbruik te geraken en spreken we van '*de verzameling van punten*', die aan één of andere voorwaarde voldoen. Aangezien dit boek een compendium is, hebben we de term 'meetkundige plaats' gehandhaafd.

X. DE DRIEHOEK
(vervolg)

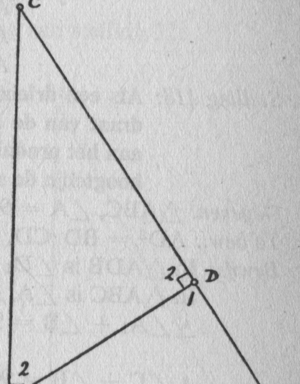
Nu we de beschikking hebben over een groot aantal stellingen, is het mogelijk de driehoek aan een verder onderzoek te onderwerpen. We beginnen met driehoeken, die een bijzondere vorm hebben, namelijk de

A. RECHTHOEKIGE DRIEHOEKEN

Definitie: Onder de projectie van een lijnstuk AB op een rechte m verstaan we het lijnstuk A′B′, waarbij A′ en B′ de projecties zijn van A en B op de rechte m.

Opmerking: Ligt een punt C op m, dan valt de projectie C′ van C op m samen met C.

131



Stelling 116: **Als een driehoek rechthoekig is, is het kwadraat van een rechthoekszijde gelijk aan het produkt van de schuine zijde en de projectie van die rechthoekszijde op de schuine zijde.**

Gegeven: △ABC, ∠A = 90°, ∠D = 90°, (fig. 131)

Te bew.: $AB^2 = BC \cdot BD$.

$$\left.\begin{array}{l} \angle D_1 = \angle A = 90° \text{ (geg.)} \\ \angle B \;\; = \angle B \end{array}\right\} \rightarrow \triangle ABD \sim \triangle CBA \rightarrow \text{geval h.h.}$$

$\rightarrow AB : BC = BD : AB.$

Volgens de hoofdeigenschap van de evenredigheden (afgekort H.E.) is dus $AB \cdot AB = BC \cdot BD$, dus $AB^2 = BC \cdot BD$.
Op dezelfde manier kunnen we bewijzen, dat $AC^2 = BC \cdot DC$.

Stelling 117: **De stelling van Pythagoras: Als een driehoek rechthoekig is, dan is de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $\angle A = 90°$. (fig. 131)
Te bew.: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Bewijs: Trek hoogtelijn AD.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A = 90° \text{ (geg.)} \\ \angle D = 90° \text{ (z.b.)}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\rightarrow AB^2 = BD \cdot BC \text{ (st. 116)} \\ \rightarrow AC^2 = CD \cdot BC \text{ (st. 116)} \quad +\end{array}$$

$$AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + CD \cdot BC$$
$$AB^2 + AC^2 = BC(BD + CD)$$
$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot BC = BC^2.$$

Stelling 118: **Als een driehoek rechthoekig is, dan is het kwadraat van de hoogtelijn op de schuine zijde gelijk aan het produkt van de twee stukken, waarin deze hoogtelijn de schuine zijde verdeelt.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $\angle A = 90°$, $\angle D = 90°$. (fig. 131)
Te bew.: $AD^2 = BD \cdot CD$.
Bewijs: In $\triangle ADB$ is $\angle D_1 = 90°$ (geg.) $\xrightarrow{1}$
In $\triangle ABC$ is $\angle A_{1,2} = 90°$ (geg.) $\xrightarrow{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{1} \angle A_1 + \angle B = 90° \text{ (st. 11)} \\ \xrightarrow{2} \angle C + \angle B = 90° \text{ (st. 11)}\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow \angle A_1 = \angle C \\ \angle D_1 = \angle D_2 = 90° \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \triangle ABD \sim \triangle CAD \rightarrow \text{ geval h.h.}$$

$$\rightarrow AD : BD = CD : AD$$
$$\text{H.E.} \rightarrow AD^2 = BD \cdot CD.$$

Stelling 119: **Als een driehoek rechthoekig is, dan is het produkt van de twee rechthoekszijden gelijk aan het produkt van de schuine zijde en de hoogtelijn op de schuine zijde.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $\angle A = 90°$, $\angle D = 90°$. (fig. 131)
Te bew.: $AB \cdot AC = BC \cdot AD$.

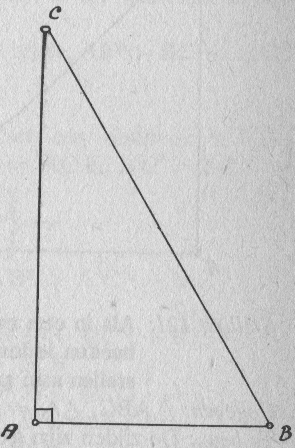
Bewijs: $\angle D_2 = \angle A = 90°$ (geg.) $\}$ $\rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DAC \rightarrow$
$\angle C = \angle C$ geval h.h.
$\rightarrow AB : AD = BC : AC$
H.E. $\rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot BC$, of
$AB \cdot AC = BC \cdot AD$.

Als we de bovenstaande stellingen samenvatten, krijgen we in iedere rechthoekige driehoek, waarin de hoogtelijn naar de schuine zijde getekend is:

1. $AB^2 = BD \cdot BC$ } stelling 116.
2. $AC^2 = CD \cdot BC$ }
3. $AB^2 + AC^2 = BC^2$ }
4. $AD^2 + BD^2 = AB^2$ } stelling 117 (st. van Pythagoras).
5. $AD^2 + CD^2 = AC^2$ }
6. $AD^2 = BD \cdot CD$ stelling 118.
7. $AB \cdot AC = BC \cdot AD$ stelling 119.

We krijgen nu nog een uitbreiding van stelling 32.

132



Stelling 120: **Als in een rechthoekige driehoek een der scherpe hoeken 30° is, dan zijn de zijden gelijk te stellen aan 2k, k en $k\sqrt{3}$.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $\angle A = 90°$, $\angle C = 30°$. (fig. 132)

Te bew.: De zijden zijn gelijk aan 2k, k en $k\sqrt{3}$.

Bewijs: De schuine zijde BC stellen we gelijk aan 2k, dan is

volgens stelling 32 de zijde AB (tegenover de hoek van 30°) gelijk aan k.

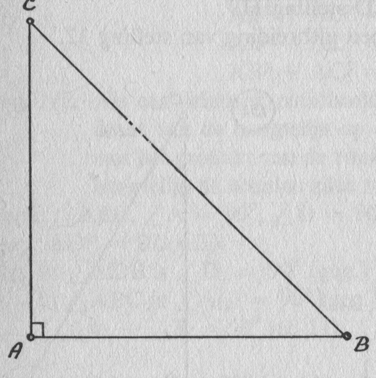
Nu is $\angle A = 90° \rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$ (st. 117) $\rightarrow k^2 + AC^2 = 4\,k^2 \rightarrow AC^2 = 3\,k^2 \rightarrow AC = k\sqrt{3}$.

Zo ontstaat voor praktisch gebruik het volgende oplossingsschema:

$\left.\begin{array}{l}\angle A = 90° \text{ (geg.)}\\ \angle C = 30° \text{ (geg.)}\\ \angle B = 60° \text{ (st. 11)}\end{array}\right\} \rightarrow$ Stel BC (tegenover de hoek van 90°) = 2k, dan is AB (tegenover de hoek van 30°) = k (st. 120) en AC (tegenover de hoek van 60°) = $k\sqrt{3}$. (st. 120)

Opmerking: Als we van deze driehoek één zijde kennen, dan is daarmee de waarde van k te bepalen en als k bekend is, kunnen de andere twee zijden gemakkelijk berekend worden.

(133)



Stelling 121: **Als in een rechthoekige driehoek de twee scherpe hoeken ieder 45° zijn, dan zijn de zijden gelijk te stellen aan p, p en $p\sqrt{2}$.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $\angle A = 90°$, $\angle B = \angle C = 45°$. (fig. 133)

Te bew.: De zijden zijn gelijk aan p, p en $p\sqrt{2}$.

Bewijs: Eén van de rechthoekszijden, namelijk AB stellen we gelijk aan p.

Omdat $\angle B = \angle C$ (geg.), is $AB = AC$, dus óók $AC = p$.

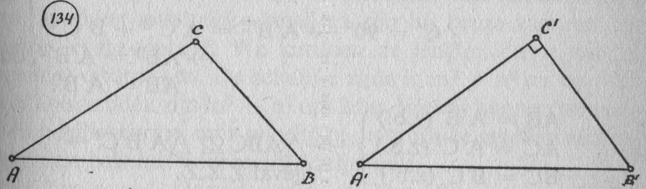
$\angle A = 90° \rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$ (st. 117) $\rightarrow p^2 + p^2 = BC^2 \rightarrow BC^2 = 2\,p^2 \rightarrow BC = p\sqrt{2}$.

Voor praktisch gebruik krijgen we het volgende op-

lossingsschema:

$\angle A = 90°$ (geg.)
$\angle B = 45°$ (geg.)
$\angle C = 45°$ (geg.) $\Rightarrow$ Stel AB (tegenover een hoek van 45°) = p, dan is AC (tegenover een hoek van 45°) = p (st. 121) en BC (tegenover de hoek van 90°) = $p\sqrt{2}$. (st. 121)

Bij deze stelling geldt dezelfde opmerking als bij stelling 120.



Stelling 122: **Als in een driehoek het kwadraat van de grootste zijde groter is dan de som van de kwadraten van de twee andere zijden, dan is die driehoek stomphoekig.**

Gegeven: $\triangle ABC$, AB is de grootste zijde, $AB^2 > BC^2 + AC^2$. (fig. 134)

Te bew.: $\triangle ABC$ is stomphoekig .

Bewijs: We vergelijken $\triangle ABC$ met een driehoek A'B'C', waarvan $\angle C' = 90°$, A'C' = AC en B'C' = BC.

$AB^2 > AC^2 + BC^2$ (geg.)
$AC = A'C'$ (z.b.)
$BC = B'C'$ (z.b.) $\rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 > A'C'^2 + B'C'^2$
$\angle C' = 90° \rightarrow A'B'^2 = A'C'^2 + B'C'^2$ $\rightarrow$

$\rightarrow AB^2 > A'B'^2$, dus $AB > A'B'$
$AC = A'C'$ (z.b.)
$BC = B'C'$ (z.b.) $\rightarrow$

$\rightarrow \angle C > \angle C'$ (st. 22)
$\angle C' = 90°$ (z.b.) $\rightarrow$

$\rightarrow \angle C > 90°$, dus $\triangle ABC$ is stomphoekig.

Stelling 123: **Als in een driehoek het kwadraat van de grootste zijde gelijk is aan de som van de kwadraten van de twee andere zijden, dan is die driehoek rechthoekig.**

Gegeven: $\triangle ABC$, AB is de grootste zijde, $AB^2 = AC^2 + BC^2$. (fig. 134)

Te bew.: $\triangle ABC$ is rechthoekig.

Bewijs: We vergelijken $\triangle ABC$ weer met een driehoek $A'B'C'$, waarvan $\angle C' = 90°$, $A'C' = AC$ en $B'C' = BC$.

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = AC^2 + BC^2 \text{ (geg.)} \\ A'C' = AC \text{ (z.b.)} \\ B'C' = BC \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \rightarrow AB^2 = A'C'^2 + B'C'^2 \\ \angle C' = 90° \rightarrow A'B'^2 = A'C'^2 + B'C'^2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow AB^2 = A'B'^2 \text{, dus } AB = A'B'.$$

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \text{ (z.b.)} \\ AC = A'C' \text{ (z.b.)} \\ BC = B'C' \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \rightarrow \text{ geval Z.Z.Z.}$$

$$\left.\begin{array}{r} \rightarrow \angle C = \angle C' \\ \angle C' = 90° \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow \angle C = 90° \text{, dus}$$

$\triangle ABC$ is rechthoekig.

Deze stelling is het *omgekeerde van de stelling van Pythagoras.*

Stelling 124: **Als in een driehoek het kwadraat van de grootste zijde kleiner is dan de som van de kwadraten van de beide andere zijden, dan is die driehoek scherphoekig.**

Gegeven: $\triangle ABC$, AB is de grootste zijde, $AB^2 < AC^2 + BC^2$. (fig. 134)

Te bew.: $\triangle ABC$ is scherphoekig.

Bewijs: We vergelijken $\triangle ABC$ met een driehoek $A'B'C'$, waarvan $\angle C' = 90°$, $A'C' = AC$ en $B'C' = BC$.

$$\left.\begin{array}{l} AB^2 < AC^2 + BC^2 \text{ (geg.)} \\ A'C' = AC \text{ (z.b.)} \\ B'C' = BC \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow AB^2 < A'C'^2 + B'C'^2.$$

$$\left.\begin{array}{r} AB^2 < A'C'^2 + B'C'^2 \\ \angle C' = 90° \rightarrow A'B'^2 = A'C'^2 + B'C'^2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow AB^2 < A'B'^2 \text{, dus } AB < A'B'.$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} AC = A'C' \text{ (z.b.)} \\ BC = B'C' \text{ (z.b.)} \\ AB < A'B' \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow \angle C < \angle C' \\ \angle C' = 90° \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow \angle C < 90°$, dus
$\angle C$ is scherp.

Omdat AB de grootste zijde van de driehoek is, is $\angle C$ de grootste hoek van de driehoek. De hoeken A en B zijn dus kleiner dan $\angle C$, dus in ieder geval zijn de hoeken A en B scherp. Hieruit volgt, dat $\triangle ABC$ scherphoekig is.

Om de theorie van de rechthoekige driehoeken te besluiten, geven we nog aan wat we met *Pythagorische driehoeken* bedoelen. Het zijn rechthoekige driehoeken, waarvan de lengten van de zijden natuurlijke getallen zijn bij keuze van een bepaalde lengte-eenheid. We kunnen de lengten der zijden in formules uitdrukken. De schuine zijde is $m^2 + n^2$ en de twee rechthoekszijden zijn $m^2 - n^2$ en $2mn$. Hierbij kunnen we voor m en n willekeurige, mits ongelijke, natuurlijke getallen nemen. De meest bekende voorbeelden zijn wel:

$m = 2$ en $n = 1$. De zijden zijn 5, 3 en 4.
Controle: $5^2 = 4^2 + 3^2$.
$m = 3$ en $n = 2$. De zijden zijn 13, 5 en 12.
Controle: $13^2 = 5^2 + 12^2$.
$m = 4$ en $n = 3$. De zijden zijn 25, 7 en 24.
Controle: $25^2 = 7^2 + 24^2$.

Ook driehoeken, waarvan de zijden veelvouden zijn van de zijden van één dezer driehoeken, zijn weer Pythagorische driehoeken. De lengten van de zijden van deze laatste driehoeken komen trouwens ook tevoorschijn uit de drie formules, hetgeen bijvoorbeeld blijkt als we $m = 3$ en $n = 1$ nemen. We vinden dan: 10, 8 en 6. (Zie eerste voorbeeld.)

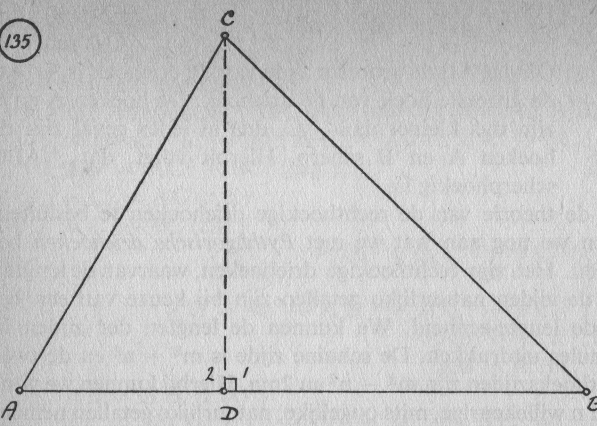
De verklaring vinden we in het feit, dat $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2\,mn)^2$. Als tweede gedeelte van dit hoofdstuk krijgen we nu enige stellingen, die toe te passen zijn op:

B. WILLEKEURIGE DRIEHOEKEN

Allereerst een tweetal stellingen, die min of meer in onbruik raken, daar ze verdrongen zijn door de veel praktischer *cosinusregel* uit de *trigonometrie*.

Stelling 125: **Als in een driehoek een zijde tegenover een scherpe hoek ligt, dan is het kwadraat van die zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de tweede en de derde zijde, verminderd met het dubbelprodukt van**

(135)



de tweede zijde en de projectie van de derde op de tweede zijde. (projectiestelling)

Gegeven: $\triangle ABC$, $\angle A$ is scherp, CD is hoogtelijn. (fig. 135)

Te bew.: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \cdot AD$.

Bewijs: Omdat $\angle A$ een scherpe hoek is en $\angle B$ ook, ligt D tussen A en B, dus $BD = AB - AD$.

$\angle D_1 = 90° \rightarrow BC^2 = CD^2 + DB^2$ (st. 117)

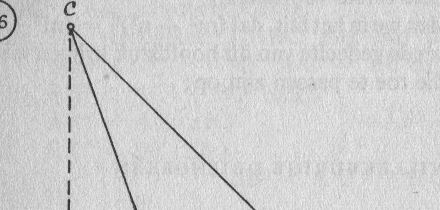
of $BC^2 = CD^2 + (AB - AD)^2 \rightarrow$

$\rightarrow BC^2 =$

$$\left.\begin{array}{l} CD^2 + AB^2 + AD^2 - 2\,AB \cdot AD \\ \angle D_2 = 90° \rightarrow AC^2 = CD^2 + AD^2 \text{ (st. 117)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,AB \cdot AD$.

(136)



Stelling 126: **Als in een driehoek een zijde tegenover een stompe hoek ligt, dan is het kwadraat van die zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de tweede en derde zijde vermeerderd met het dubbelprodukt van de tweede zijde en de projectie van de derde op de tweede zijde.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $\angle A$ is stomp, CD is hoogtelijn. (fig. 136)

Te bew.: $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,AB\cdot AD$.

Bewijs: Omdat $\angle A$ een stompe hoek is, ligt D op het verlengde van BA, dus $DB = DA + AB$.

$$\angle D = 90° \rightarrow BC^2 = CD^2 + DB^2 \text{ (st. 117)} \rightarrow$$
$$\rightarrow BC^2 = CD^2 + (DA + AB)^2 \rightarrow$$
$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow BC^2 = \\ \quad CD^2 + DA^2 + AB^2 + 2\,DA\cdot AB \\ \angle D = 90° \rightarrow AC^2 = \\ \quad CD^2 + DA^2 \end{array}\right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2\,AB\cdot AD.$$

Opmerking: In de trigonometrie kunnen we de beide laatst genoemde stellingen samenvatten in de cosinusregel:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB\cdot AC\cdot \cos A.$$

Het feit, dat $\angle A$ scherp of stomp kan zijn, geeft hier geen moeilijkheden, omdat de cosinus van een scherpe hoek positief s en die van een stompe hoek negatief, zodat in het laatste geval het minteken uit de cosinusregel bij een berekening 'automatisch' in een plusteken verandert.

Er is nog een andere vorm, waarin we de projectiestelling gebruiken, namelijk als we de projectie van één der zijden op één van de andere zijden willen berekenen, terwijl de drie zijden bekend zijn. Als voorbeeld nemen we de projectie AD van de zijde AC op de zijde BC. (fig. 135)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB\cdot AD \text{ (st. 125)} \rightarrow$$
$$\rightarrow 2\,AB\cdot AD = AB^2 + AC^2 - BC^2 \rightarrow AD =$$
$$\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB}.$$

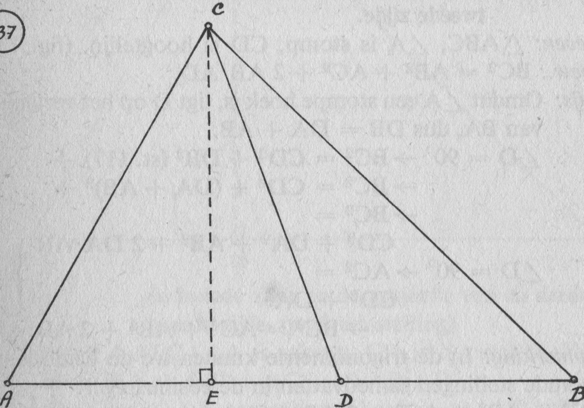
De projectie *van* de ene zijde *op* de andere zijde is dus gelijk aan: projectie =

$$\frac{(\text{zijde waarop})^2 + (\text{zijde waarvan})^2 - (\text{derde zijde})^2}{2(\text{zijde waarop})}$$

Voor iedere driehoek ABC kunnen we deze formule dus zes maal uitschrijven, om de projectie van de ene zijde op de andere zijde te berekenen. Er zijn namelijk zes mogelijkheden:

AB op AC of BC, BC op AB of AC, AC op AB of BC. Vinden we voor de projectie een negatief getal, dan betekent dat, dat die projectie een lijnstuk buiten de driehoek op het verlengde van één van de zijden is, dus dat de driehoek stomphoekig is.

137



Stelling 127: **Als in een driehoek ABC een lijnstuk CD het hoekpunt C verbindt met een punt D van de zijde AB, dan is $CD^2 \cdot AB = BC^2 \cdot AD + AC^2 \cdot BD - AD \cdot DB \cdot AB$. (stelling van Stewart)**

Gegeven: $\triangle ABC$, D op AB. (fig. 137)

Te bew.: $CD^2 \cdot AB = AC^2 \cdot DB + BC^2 \cdot AD - AD \cdot BD \cdot AB$.

Bewijs: Trek hoogtelijn CE. In driehoek ABC is, als $\angle A$ scherp is,

$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2\,AD \cdot AE$ (st. 125)

In $\triangle ABC$ is

$$AE = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AB} \text{ (projectieformule).}$$

$$\rightarrow CD^2 = AD^2 + AC^2 - \frac{AD(AB^2 + AC^2 - BC^2)}{AB} \rightarrow$$

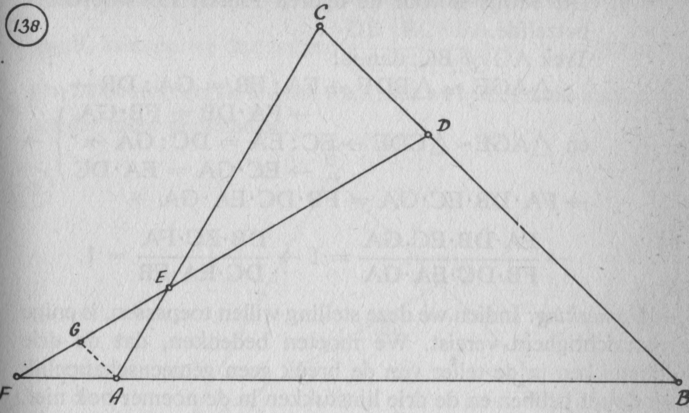
$$\rightarrow CD^2 \cdot AB = AD^2 \cdot AB + AC^2 \cdot AB - AB^2 \cdot AD - AC^2 \cdot AD + BC^2 \cdot AD \rightarrow$$

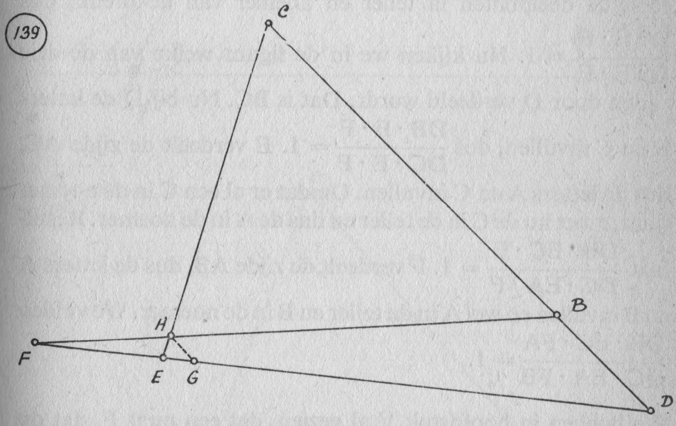
$$\rightarrow CD^2 \cdot AB = (AC^2 \cdot AB - AC^2 \cdot AD) + {} + BC^2 \cdot AD - (AB^2 \cdot AD - AD^2 \cdot AB) \rightarrow$$

$$\rightarrow CD^2 \cdot AB = AC^2(AB - AD) + BC^2 \cdot AD - AD \cdot AB(AB - AD) \rightarrow$$

$\rightarrow CD^2 \cdot AB = AC^2 \cdot BD + BC^2 \cdot AD - AD \cdot BD \cdot AB.$

Opmerking: Zoals de lezer zelf kan nagaan, blijft het eindresultaat hetzelfde, als $\angle A$ stomp of recht is.





Stelling 128: **Als een rechte m de zijden BC, AC en AB van $\triangle$ABC, of de verlengden van die zijden snijdt in de punten D, E en F, dan is**

$$\frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1.$$

(stelling van Menelaos)

Gegeven: $\triangle ABC$, rechte m. (fig. 138 en 139)

Te bew.: $\dfrac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1$

Bewijs: Dit bewijs is voor de figuren 138 en 139 woordelijk hetzelfde.

Trek AG // BC, dan is:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle AGF \sim \triangle BDF \rightarrow FA : FB = GA : DB \rightarrow \\ \rightarrow FA \cdot DB = FB \cdot GA \\ \text{en } \triangle AGE \sim \triangle CDE \rightarrow EC : EA = DC : GA \rightarrow \\ \rightarrow EC \cdot GA = EA \cdot DC \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow FA \cdot DB \cdot EC \cdot GA = FB \cdot DC \cdot EA \cdot GA \rightarrow$$

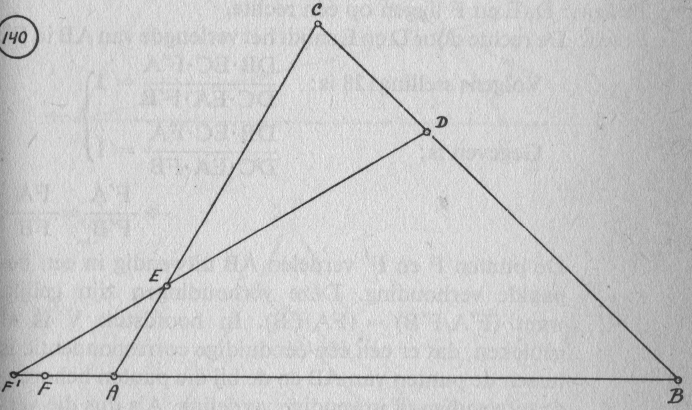
$$\rightarrow \frac{FA \cdot DB \cdot EC \cdot GA}{FB \cdot DC \cdot EA \cdot GA} = 1 \rightarrow \frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1.$$

Opmerking: Indien we deze stelling willen toepassen, is enige voorzichtigheid vereist. We moeten bedenken, dat de drie lijnstukken in de teller van de breuk geen gemeenschappelijk eindpunt hebben en de drie lijnstukken in de noemer ook niet. Een manier om dit te bereiken is de volgende: We schrijven eerst de deelpunten in teller en noemer van de breuk, dus $\dfrac{D \cdot E \cdot F}{D \cdot E \cdot F} = 1$. Nu kijken we in de figuur welke van de drie zijden door D verdeeld wordt. Dat is BC. Nu bij D de letters B en C invullen, dus $\dfrac{DB \cdot E \cdot F}{DC \cdot E \cdot F} = 1$. E verdeelt de zijde AC, dus de letters A en C invullen. Omdat er al een C in de noemer staat, moet nu de C in de teller en dus de A in de noemer. Resultaat $\dfrac{DB \cdot EC \cdot F}{DC \cdot EA \cdot F} = 1$. F verdeelt de zijde AB, dus de letters A en B invullen en wel A in de teller en B in de noemer. We vinden $\dfrac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1$.

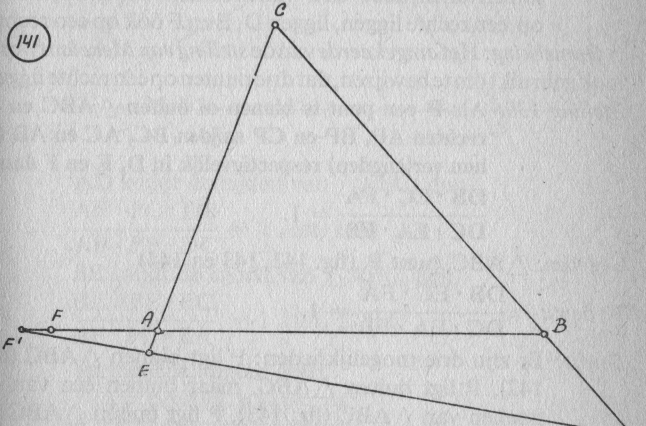
We hebben in hoofdstuk V al gezien, dat een punt F, dat op het verlengde van BA ligt, het lijnstuk AB uitwendig verdeelt in de verhouding FA/FB. Zo verdeelt een punt D in figuur 138 het lijnstuk BC inwendig in de verhouding DB/DC. In figuur 138 hebben we dus één uitwendig en twee inwendig verdeelde zijden. Als we de lijnstukken een teken toekennen, dan is een uitwendige verdeling positief en een inwendige verdeling negatief. (Zie hoofdstuk V.) De stelling van Menelaos zegt iets

over het produkt van deze drie verdelingen. In figuur 138 is dit produkt dus positief ($- \cdot - \cdot + = +$) en in figuur 139 eveneens ($+ \cdot + \cdot + = +$). Aangezien er geen andere mogelijkheden zijn, als een rechte de zijden van een driehoek snijdt, kunnen we dus zeggen $\frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = +1$. (We mogen nu echter niet de letters, waarmee we een lijnstuk aangeven zonder meer verwisselen.)

140



141



Stelling 129: **Als op de zijden BC, AC en AB van △ABC of op de verlengden van die zijden respectievelijk de punten D, E en F liggen en $\frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1$ dan liggen D, E en F op een rechte.**

Gegeven: △ABC, D op BC, E op AC, F op AB,
$\frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1$. (fig. 140 en 141)

Te bew.: D, E en F liggen op één rechte.

Bewijs: De rechte door D en E snijdt het verlengde van AB in F′.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Volgens stelling128 is:} & \frac{DB \cdot EC \cdot F'A}{DC \cdot EA \cdot F'B} = 1 \\ \text{Gegeven is:} & \frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{F'A}{F'B} = \frac{FA}{FB}.$$

De punten F en F′ verdelen AB uitwendig in een bepaalde verhouding. Deze verhoudingen zijn gelijk, want (F′A/F′B) = (FA/FB). In hoofdstuk V is al gebleken, dat er een één-éénduidige correspondentie is tussen de punten van AB en de bij die punten behorende uitwendige of inwendige verdeling. Als dus die verhoudingen gelijk zijn, moeten de bijbehorende punten samenvallen, dus F en F′ vallen samen. Omdat D, E en F′ op een rechte liggen, liggen D, E en F óók op een rechte.

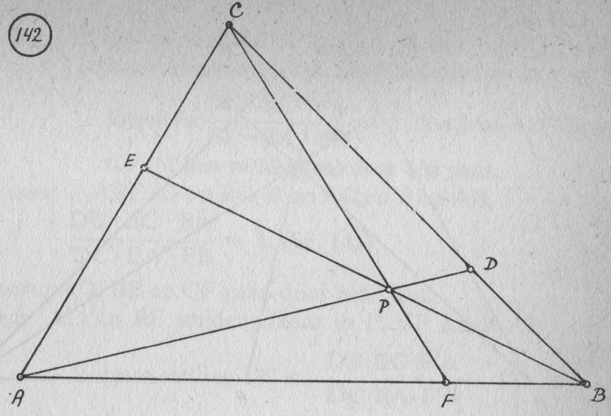
Opmerking: Het *omgekeerde* van de *stelling van Menelaos* wordt vaak gebruikt om te bewijzen, dat drie punten op één rechte liggen.

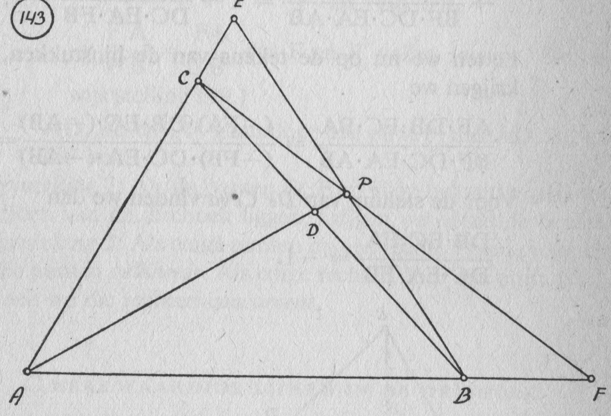
Stelling 130: **Als P een punt is binnen of buiten △ABC en de rechten AP, BP en CP snijden BC, AC en AB (of hun verlengden) respectievelijk in D, E en F dan is $\frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1$.**

Gegeven: △ABC, punt P. (fig. 142, 143 en 144)

Te bew.: $\frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1$.

Bewijs: Er zijn drie mogelijkheden: P ligt binnen △ABC (fig. 142), P ligt buiten △ABC, maar binnen één van de hoeken van △ABC (fig. 143), P ligt buiten △ABC en buiten de hoeken van △ABC (fig. 144).





AD snijdt de zijden van $\triangle$FBC, dus

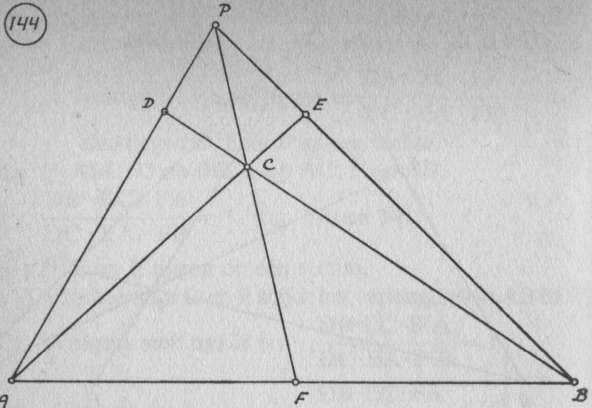
$$\frac{AF \cdot PC \cdot DB}{AB \cdot PF \cdot DC} = 1 \text{ . (st. 128)}$$

BE snijdt de zijden van $\triangle$AFC, dus

$$\frac{BA \cdot PF \cdot EC}{BF \cdot PC \cdot EA} = 1 \text{ . (st. 128)}$$

Vermenigvuldiging geeft

$$\frac{AF \cdot PC \cdot DB \cdot BA \cdot PF \cdot EC}{AB \cdot PF \cdot DC \cdot BF \cdot PC \cdot EA} = 1 \rightarrow$$



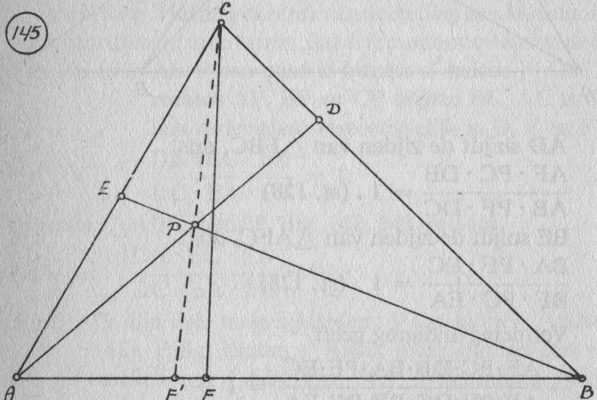
$$\rightarrow \frac{AF \cdot DB \cdot EC \cdot BA}{BF \cdot DC \cdot EA \cdot AB} = 1 \rightarrow \frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1.$$

Letten we nu op de tekens van de lijnstukken, dan krijgen we

$$\frac{AF \cdot DB \cdot EC \cdot BA}{BF \cdot DC \cdot EA \cdot AB} = \frac{(-FA) \cdot DB \cdot EC \cdot (-AB)}{(-FB) \cdot DC \cdot EA \cdot (-AB)} = -1$$

Voor de stelling van *De Ceva* vinden we dan

$$\frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = -1.$$



Stelling 131: **Als op de zijden BC, AC en AB van △ABC (of op hun verlengden) respectievelijk de punten D, E en F liggen en** $\frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1$**, dan gaan AD, BE en CF (of hun verlengden) door één punt.**

Gegeven: △ABC, D op BC, E op AC en F op AB, $\frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1$. (fig. 145)

Te bew.: AD, BE en CF gaan door één punt.

Bewijs: AD en BE snijden elkaar in P. CP snijdt AB in F′.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Volgens stelling 130 is:} & \frac{DB \cdot EC \cdot F'A}{DC \cdot EA \cdot F'B} = 1 \\ \text{Gegeven is:} & \frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1\end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow \frac{F'A}{F'B} = \frac{FA}{FB}$, dus F en F′ vallen samen. (Zie bewijs stelling 129.)

AD, BE en CF′ gaan door één punt P, dus AD, BE en CF ook.

Opmerking 1: Als de punten D, E en F op het verlengde van de zijden van de driehoek liggen, krijgen we hetzelfde bewijs.

Opmerking 2: Als enige punten op één rechte liggen, noemen we die punten *collineair*. Als enige rechten door één punt gaan, noemen we die rechten *concurrent*.

C. MERKWAARDIGE LIJNEN IN DE DRIEHOEK

We hebben in een driehoek met de volgende merkwaardige lijnen te doen: hoogtelijnen, zwaartelijnen, bissectrices, buitenbissectrices en middelloodlijnen. We herhalen nu eerst de in hoofdstuk III gegeven definities van deze lijnen (lijnstukken).

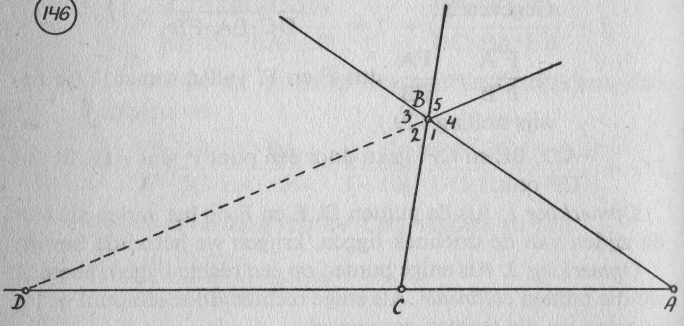
1. Definities

Een hoogtelijn van een driehoek is het lijnstuk, dat het hoekpunt van een hoek verbindt met de projectie van dat hoekpunt op de overstaande zijde.

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijnstuk, dat een hoekpunt verbindt met het midden van de overstaande zijden.

Een bissectrice van een driehoek is het lijnstuk, dat gelegen is op de bissectrice van een hoek van de driehoek en dat begrensd wordt door het hoekpunt en het snijpunt met de overstaande zijde.
Een buitenbissectrice van een driehoek is het lijnstuk, dat gelegen is op de bissectrice van een van de buitenhoeken van de driehoek en dat begrensd wordt door het hoekpunt en het snijpunt met de overstaande zijde.
Een middelloodlijn van een driehoek is de rechte, die een zijde van de driehoek loodrecht middendoor deelt.
In een driehoek kunnen we van ieder van deze merkwaardige lijnen er drie tekenen, behalve in een rechthoekige driehoek, waar twee van de hoogtelijnen samenvallen met de rechthoekszijden.

(146)



Opmerking: Iedere hoek van een driehoek heeft twee nevenhoeken, die we zien, als we òf het ene, òf het andere been van die hoek verlengen. Deze nevenhoeken heten hier buitenhoeken van de driehoek. Er zijn dus in totaal zes buitenhoeken te tekenen. We zouden verwachten, dat er zes buitenbissectrices zijn, maar de bissectrices van de buitenhoeken liggen twee aan twee in elkaars verlengde, hetgeen blijkt uit figuur 146. $\angle B_{2,3}$ en $\angle B_{4,5}$ zijn de buitenhoeken bij B met hun bissectrices. Daar het overstaande hoeken zijn, is $\angle B_{2,3} = \angle B_{4,5}$. Verder is $\angle B_3 = \frac{1}{2}\angle B_{2,3}$ en $\angle B_4 = \frac{1}{2}\angle B_{4,5}$, dus

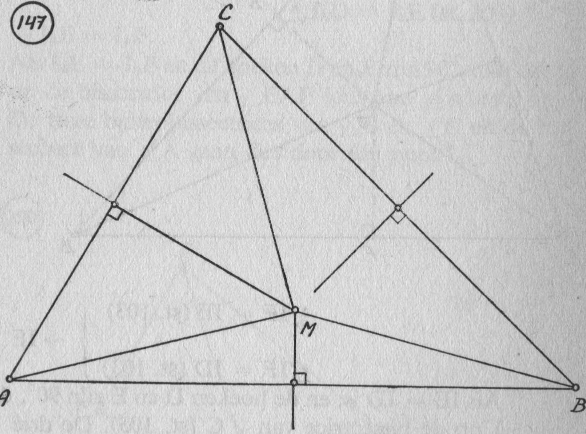
$$\left.\begin{array}{l}\angle B_3 = \angle B_4 \\ \angle B_{1,2} = \angle B_{1,2}\end{array}\right\} \rightarrow \angle B_{1,2,3} = \angle B_{2,1,4}.$$

Omdat $\angle B_{1,2,3}$ een gestrekte hoek is, is $\angle B_{2,1,4}$ óók een gestrekte hoek en de bissectrices van de hoeken $B_{2,3}$ en $B_{4,5}$ liggen dus in elkaars verlengde. Het *lijnstuk* BD is nu een *buitenbissec-*

trice (zie def.) en het verlengde van DB is de *bissectrice van een buitenhoek*. De buitenbissectrice is een *lijnstuk* en de bissectrice van de buitenhoek is een *halve rechte*.

2. *Over het concurrent zijn van merkwaardige lijnen*

147



Stelling 132: **De middelloodlijnen in een driehoek gaan door één punt.**

Gegeven: $\triangle$ABC, de middelloodlijnen van AB en AC snijden elkaar in M. (fig. 147)

Te bew.: De middelloodlijn van BC gaat door M.

Bewijs: M ligt op de middelloodlijn van AB $\xrightarrow{1}$
M ligt op de middelloodlijn van AC $\xrightarrow{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{1} MA = MB \text{ (st. 102)} \\ \xrightarrow{2} MA = MC \text{ (st. 102)} \end{array}\right\} \rightarrow MB = MC.$$

Als MB = MC is, ligt M op de middelloodlijn van BC (st. 102).

De drie middelloodlijnen gaan dus door één punt.

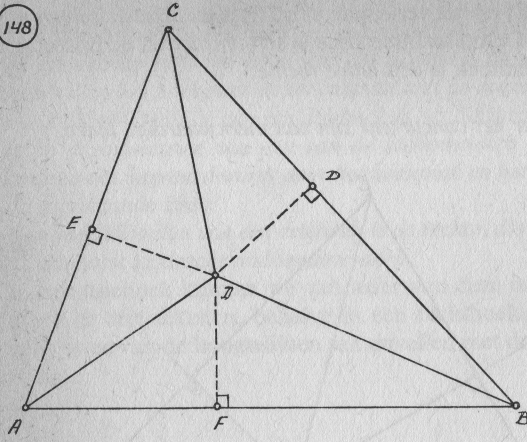
Stelling 133: **De bissectrices van een driehoek gaan door één punt.**

Gegeven: $\triangle$ABC, de bissectrices van $\angle$A en $\angle$B gaan door punt I. (fig. 148)

Te bew.: De bissectrice van $\angle$C gaat door I.

Bewijs: I ligt op de bissectrice van $\angle$A $\xrightarrow{1}$
I ligt op de bissectrice van $\angle$B $\xrightarrow{2}$

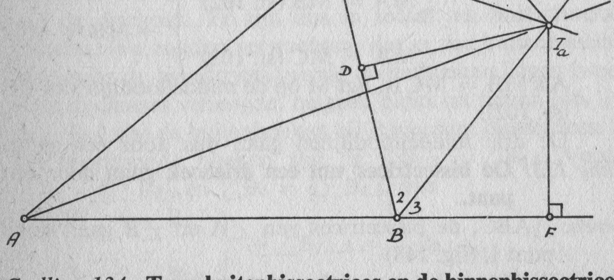
148



$\xrightarrow{1}$ IF = IE (st. 103)
$\xrightarrow{2}$ IF = ID (st. 103)
} → IE = ID.

Als IE = ID is, en de hoeken D en E zijn 90°, dan ligt I op de bissectrice van ∠C (st. 103). De drie bissectrices gaan dus door één punt I.

149



Stelling 134: **Twee buitenbissectrices en de binnenbissectrice van de derde hoek van een driehoek gaan door één punt.**

Gegeven: △ABC, de buitenbissectrices van ∠B en ∠C snijden

elkaar in I_a. (fig. 149)

Te bew.: De bissectrice van $\angle A$ gaat door I_a.

Bewijs: I_a ligt op de bissectrice van $\angle B_{2,3} \xrightarrow{1}$

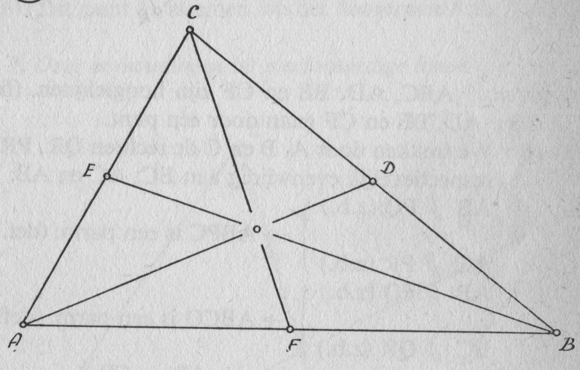
I_a ligt op de bissectrice van $\angle C_{2,3} \xrightarrow{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{1} I_aD = I_aF \text{ (st. 103)} \\ \\ \xrightarrow{2} I_aD = I_aE \text{ (st. 103)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow I_aE = I_aF$.

Als $I_aE = I_aF$ en de hoeken D en E zijn 90°, dan ligt I_a op de bissectrice van $\angle EAF$ (dus van $\angle A$) (st. 103). De twee buitenbissectrices van $\angle B$ en $\angle C$ en de bissectrice van $\angle A$ gaan dus door één punt I_a.

150



Stelling 135: **De zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt.**

Gegeven: $\triangle ABC$, D, E en F zijn de middens van BC, AC en AB. (fig. 150)

Te bew.: De zwaartelijnen AD, BE en CF gaan door één punt.

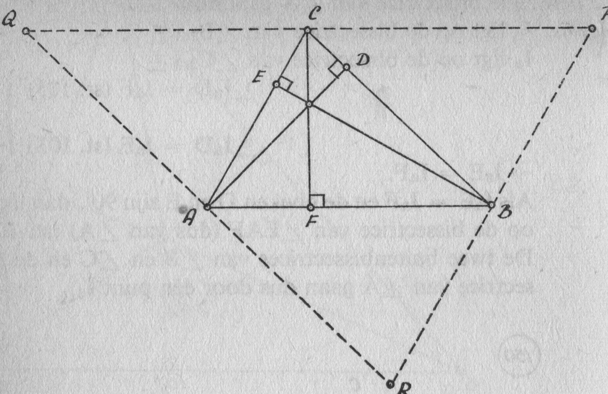
Bewijs: Stel $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$, dan is $FA = FB = \frac{1}{2}c$ en $EC = EA = \frac{1}{2}b$ en $DB = DC = \frac{1}{2}a$. Dus

$$\frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}c}{\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}c} = 1.$$

Volgens het omgekeerde van de stelling van De Ceva (st. 131) gaan AD, BE en CF door één punt.

Stelling 136: **De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.**

(151)



Gegeven: $\triangle$ABC, AD, BE en CF zijn hoogtelijnen. (fig. 151)
Te bew.: AD, BE en CF gaan door één punt.
Bewijs: We trekken door A, B en C de rechten QR, PR en PQ respectievelijk evenwijdig aan BC, AC en AB.

AB // PQ (z.b.)
AC // PR (z.b.) } $\rightarrow$ ABPC is een parm. (def.) $\xrightarrow{1}$

AB // PQ (z.b.)
BC // QR (z.b.) } $\rightarrow$ ABCQ is een parm. (def.) $\xrightarrow{2}$

$\xrightarrow{1}$ AB = CP (st. 35)
$\xrightarrow{2}$ AB = QC (st. 35) } $\rightarrow$ CP = QC.

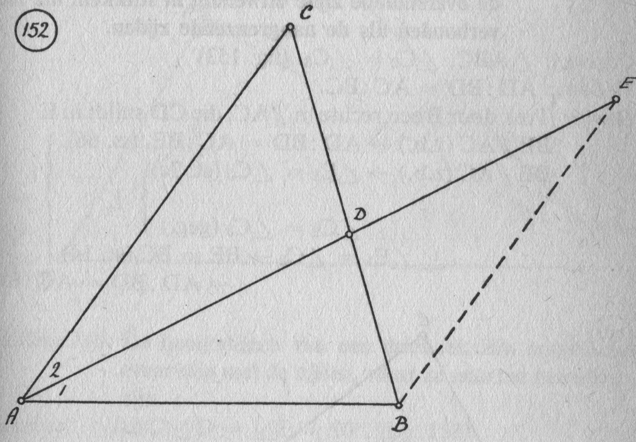
AB // PQ (z.b.)
CF $\perp$ AB (geg.) } $\rightarrow$ CF $\perp$ PQ. (st. 7d)

We hebben nu gevonden, dat hoogtelijn CF middelloodlijn is van PQ. Op gelijke wijze kunnen we aantonen, dat de hoogtelijnen AD en BE middelloodlijnen zijn van PR en QR.
Volgens stelling 132 gaan de middelloodlijnen van $\triangle$PQR door één punt, dus AD, BE en CF gaan door één punt.

De *middelloodlijnen* van een driehoek snijden elkaar in één punt M (st. 132). Dit punt is het middelpunt van de *omgeschreven cirkel* van △ABC. Deze cirkel gaat door A, B en C.
De *bissectrices* van een driehoek snijden elkaar in één punt I (st. 133). Dit punt I is het middelpunt van de *ingeschreven cirkel* van △ABC. Deze cirkel raakt aan de zijden AB, BC en AC van △ABC.
Twee *buitenbissectrices* en één binnenbissectrice snijden elkaar in één punt I_a, of I_b, of I_c (st. 134). Deze punten zijn de middelpunten van de *aangeschreven cirkels* van △ABC. Deze cirkels raken aan de zijden (of de verlengden van de zijden) van △ABC.
De *zwaartelijnen* van een driehoek snijden elkaar in één punt Z (st. 135). Dit punt Z noemen we het *zwaartepunt* van △ABC.
De hoogtelijnen van een driehoek snijden elkaar in één punt H (st. 136). Dit punt H noemen we het *hoogtepunt* van △ABC.

3. *Over verhoudingen bij merkwaardige lijnen*

152



Stelling 137: **Een bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde inwendig in twee stukken, die zich verhouden als de aangrenzende zijden.**

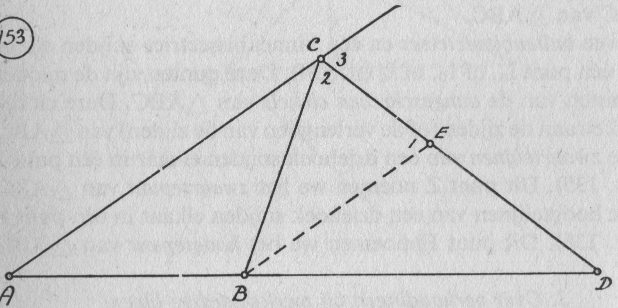
Gegeven: △ABC, $\angle A_1 = \angle A_2$. (fig. 152)

Te bew.: DB : DC = AB : AC.

Bewijs: Trek door B een rechte m // AC, die AD snijdt in E.

$AC \parallel BE$ (z.b.) $\rightarrow DB : DC = BE : AC$. (st. 66)
$AC \parallel BE$ (z.b.) $\rightarrow \angle A_2 = \angle E$ (st. 7c)
$\angle A_2 = \angle A_1$ (geg.) $\xrightarrow{1}$
$\xrightarrow{1} \angle E = \angle A_1 \rightarrow BE = AB$ (st. 14) $\rightarrow$
$\rightarrow DB : DC = AB : AC$.

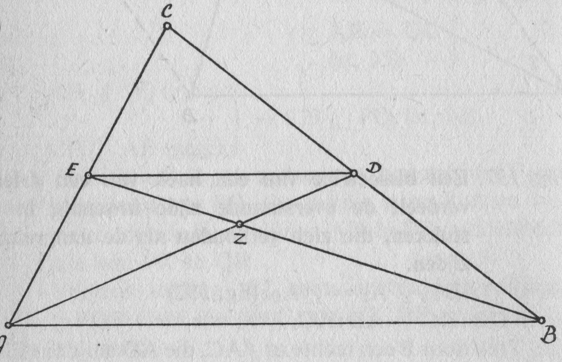
153



Stelling 138: **Een buitenbissectrice van een driehoek verdeelt de overstaande zijde uitwendig in stukken, die zich verhouden als de aangrenzende zijden.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $\angle C_2 = \angle C_3$. (fig. 153)
Te bew.: $AD : BD = AC : BC$.
Bewijs: Trek door B een rechte m $\parallel AC$, die CD snijdt in E
$BE \parallel AC$ (z.b.) $\rightarrow AD : BD = AC : BE$. (st. 66).
$BE \parallel AC$ (z.b.) $\rightarrow \angle E_1 = \angle C_3$ (st. 7c)
$\angle C_2 = \angle C_3$ (geg.) $\xrightarrow{1}$
$\xrightarrow{1} \angle E_1 = \angle C_2 \rightarrow BE = BC$ (st. 14) $\rightarrow$
$\rightarrow AD : BD = AC : BC$.

154



Stelling 139: **De zwaartelijnen van een driehoek verdelen elkaar in stukken, die zich verhouden als 2 : 1.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $BD = DC$, $CE = EA$. (fig. 154)

Te bew.: $AZ : ZD = 2 : 1$.

Bewijs: Trek DE. In $\triangle ABC$ is DE middenparallel, dus $DE \parallel AB$ en $DE = \frac{1}{2} AB$.

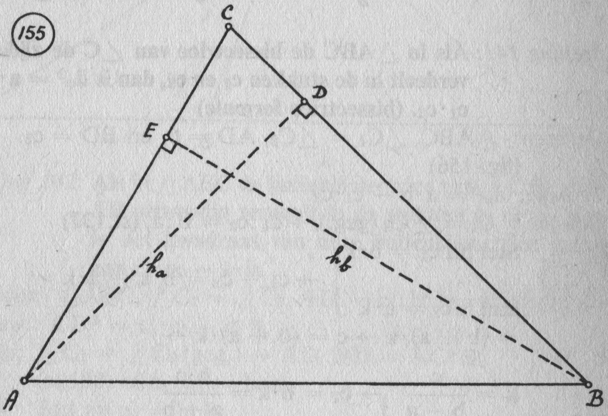
$\left.\begin{array}{l} DE \parallel AB \text{ (z.b.)} \rightarrow AZ : ZD = AB : DE \text{ (st.66)} \\ DE = \frac{1}{2} AB \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow AZ : ZD = AB : \frac{1}{2} AB$, dus

$AZ : ZD = 2 : 1$.

Op dezelfde manier is deze betrekking voor de beide andere zwaartelijnen te bewijzen.

155



Stelling 140: **De hoogtelijnen van een driehoek zijn omgekeerd evenredig met de zijden, waar ze naartoe getrokken zijn.**

Gegeven: $\triangle ABC, \angle D = \angle E = 90°$. (fig. 155)

Te bew.: $h_a : h_b = b : a$, of $a : h_a = b : h_b$.

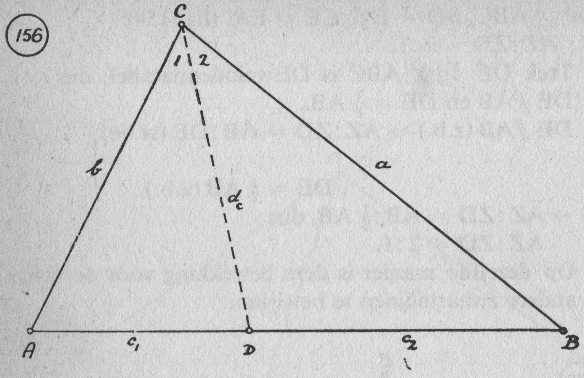
Bewijs: $\left.\begin{array}{l} \angle D = \angle E = 90° \text{ (geg.)} \\ \angle C = \angle C \end{array}\right\} \rightarrow \triangle ADC \sim \triangle BEC \rightarrow$ geval h.h.

$\rightarrow AD : BE = AC : BC$, dus

$h_a : h_b = b : a$, of $a \cdot h_a = b \cdot h_b$.

Evenzo kunnen we bewijzen: $h_a : h_c = c : a$

en $h_b : h_c = c : b$.



Stelling 141: **Als in △ABC de bissectrice van ∠C de zijde AB verdeelt in de stukken c_1 en c_2, dan is $d_c^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2$. (bissectrice formule)**

Gegeven: △ABC, $\angle C_1 = \angle C_2$, $AD = c_1$ en $BD = c_2$. (fig. 156)

Te bew.: $d_c^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2$.

Bewijs: $\angle C_1 = \angle C_2$ (geg.) $\rightarrow c_1 : c_2 = b : a$. (st.137)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Stel nu } c_1 = b \cdot k \\ \text{dan is } c_2 = a \cdot k\end{array}\right\} \rightarrow c_1 + c_2 = b \cdot k + a \cdot k =$$

$$= (b + a) \cdot k \rightarrow c = (b + a) \cdot k \rightarrow$$

$$k = \frac{c}{b + a} \rightarrow c_1 = b \cdot k = \frac{b \cdot c}{a + b}$$

$$\rightarrow c_2 = a \cdot k = \frac{a \cdot c}{a + b}.$$

Volgens de stelling van Stewart (st.127) is $d_c^2 \cdot c = a^2 \cdot c_1 + b^2 \cdot c_2 - c_1 \cdot c_2 \cdot c$, dus na gedeeltelijke substitutie van de hierboven gevonden vormen voor c_1 en c_2 krijgen we

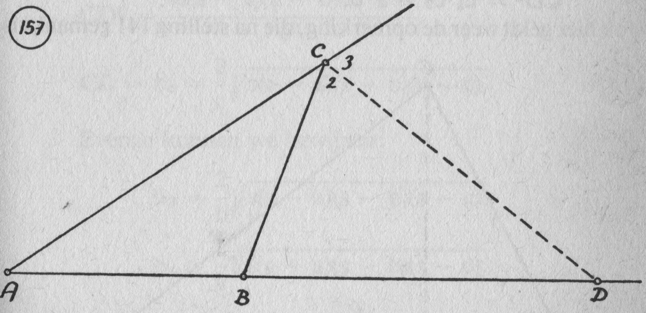
$$d_c^2 \cdot c = \frac{a^2 \cdot b \cdot c}{a + b} + \frac{a \cdot b^2 \cdot c}{a + b} - c_1 \cdot c_2 \cdot c$$

$$d_c^2 \cdot c = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot (a + b)}{a + b} - c_1 \cdot c_2 \cdot c$$

$d_c^2 \cdot c = a \cdot b \cdot c - c_1 \cdot c_2 \cdot c$
$d_c^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2$. Evenzo kunnen we bewijzen:
$d_b^2 = a \cdot c - b_1 \cdot b_2$ en
$d_a^2 = b \cdot c - a_1 \cdot a_2$.

Opmerking: De eerste helft van het bewijs kan korter, doch is hier opgenomen, omdat het in schemavorm aangeeft, hoe we de stukken kunnen berekenen, waarin een zijde van een driehoek door een bissectrice verdeeld wordt.

157



Stelling 142: **Als in $\triangle ABC$ de buitenbissectrice van $\angle C$ de zijde AB uitwendig verdeelt in de stukken c_1 en c_2, dan is het kwadraat van deze buitenbissectrice gelijk aan $c_1 \cdot c_2 - a \cdot b$.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $\angle C_2 = \angle C_3$, $AD = c_1$, $BD = c_2$. (fig. 157)
Te bew.: $CD^2 = c_1 \cdot c_2 - a \cdot b$.
Bewijs: $\angle C_2 = \angle C_3$ (geg.) $\rightarrow AD : BD = AC : BC$ (st.138) of $c_1 : c_2 = b : a$.

Stel nu $c_1 = b \cdot k$, dan is $c_2 = a \cdot k$ $\rightarrow c_1 - c_2 = b \cdot k - a \cdot k = (b - a) \cdot k$.

Maar $c_1 - c_2 = c$, dus $c = (b - a) \cdot k \rightarrow$

$$k = \frac{c}{b-a} \rightarrow c_1 = b \cdot k = \frac{b \cdot c}{b - a}.$$
$$\rightarrow c_2 = a \cdot k = \frac{a \cdot c}{b - a}.$$

Volgens de stelling van Stewart (st.127), toegepast op BC in $\triangle ADC$ is, $a^2 \cdot c_1 = b^2 \cdot c_2 + CD^2 \cdot c - c \cdot c_1 \cdot c_2$

$$\frac{a^2 \cdot b \cdot c}{b - a} = \frac{a \cdot b^2 \cdot c}{b - a} + CD^2 \cdot c - c \cdot c_1 \cdot c_2$$

$$CD^2 \cdot c = c \cdot c_1 \cdot c_2 - \frac{a \cdot b^2 \cdot c}{b - a} + \frac{a^2 \cdot b \cdot c}{b - a}$$

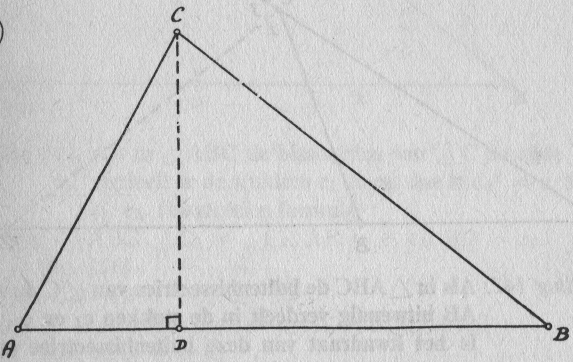
$$CD^2 \cdot c = c \cdot c_1 \cdot c_2 - \frac{a \cdot b \cdot c \cdot (b - a)}{b - a}$$

$$CD^2 \cdot c = c \cdot c_1 \cdot c_2 - a \cdot b \cdot c$$

$$CD^2 = c_1 \cdot c_2 - a \cdot b.$$

Ook hier geldt weer de opmerking, die na stelling 141 gemaakt is.

158



Stelling 143: **Als 2s de omtrek van $\triangle ABC$ voorstelt, dan is**

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Gegeven: $\triangle ABC$, $CD = h_c$, $\angle D = 90°$. (fig. 158)

Te bew.: $h_c = \frac{2}{c} \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$.

Bewijs: $\angle D = 90°$ (geg.) $\rightarrow AD^2 + CD^2 = AC^2 \rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow CD^2 = b^2 - AD^2 \text{ (st.117)} \\ \text{Volgens de projectiestelling is} \\ AD^2 = \dfrac{(c^2 + b^2 - a^2)^2}{4\,c^2} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow CD^2 = b^2 - \frac{(c^2 + b^2 - a^2)^2}{4\,c^2} =$$

$$= \frac{4\,b^2c^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2}{4\,c^2}$$

$$CD^2 = \frac{(2\,bc + c^2 + b^2 - a^2)(2\,bc - c^2 - b^2 + a^2)}{4\,c^2}$$

$$CD^2 = \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}{4\,c^2}.$$

Omdat $a + b + c = 2s$ is $b + c - a = 2s - 2a$, $a - b + c = 2s - 2b$ en $a + b - c = 2s - 2c$, dus

$$CD^2 = \frac{2s(2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)}{4\,c^2}$$

$$CD^2 = \frac{4s(s - a)(s - b)(s - c)}{c^2}$$

$$CD = h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

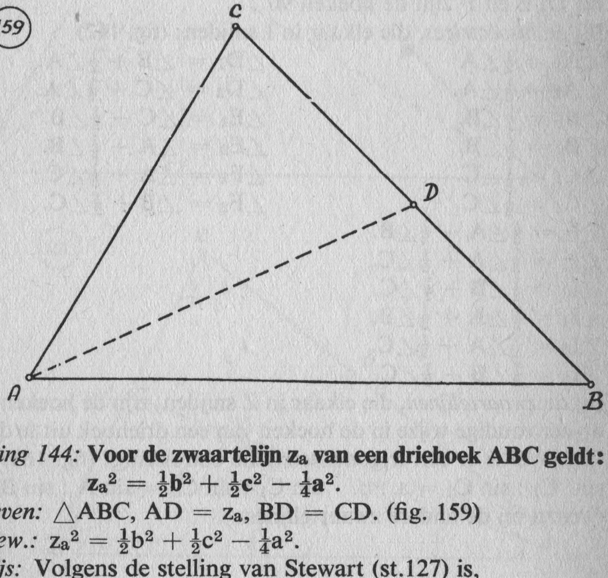
Evenzo kunnen we bewijzen:

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Deze formule staat bekend onder de naam van *s-formule*.

(159)



Stelling 144: **Voor de zwaartelijn z_a van een driehoek ABC geldt: $z_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $AD = z_a$, $BD = CD$. (fig. 159)

Te bew.: $z_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$.

Bewijs: Volgens de stelling van Stewart (st.127) is,

$AD^2 \cdot a = b^2 \cdot \frac{1}{2}a + c^2 \cdot \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot a$
$AD^2 \cdot a = \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}ac^2 - \frac{1}{4}a^3$
$AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$
$z_a{}^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$ Evenzo kunnen we bewijzen:
$z_b{}^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}b^2.$
$z_c{}^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2.$

5. *Over de hoeken bij merkwaardige lijnen*

We zullen hier alleen de diverse hoeken opsommen. Het bewijs laten we aan de lezer over.

Bij de *middelloodlijnen*, die elkaar in M snijden: (fig. 160)
$\angle A_1 = 90° - C.$ $\angle B_1 = 90° - A.$ $\angle C_1 = 90° - B.$
$\angle A_2 = 90° - B.$ $\angle B_2 = 90° - C.$ $\angle C_2 = 90° - A.$
$\angle M_1 = \angle A.$ $\angle M_3 = \angle B.$ $\angle M_5 = \angle C.$
$\angle M_2 = \angle A.$ $\angle M_4 = \angle B.$ $\angle M_6 = \angle C.$

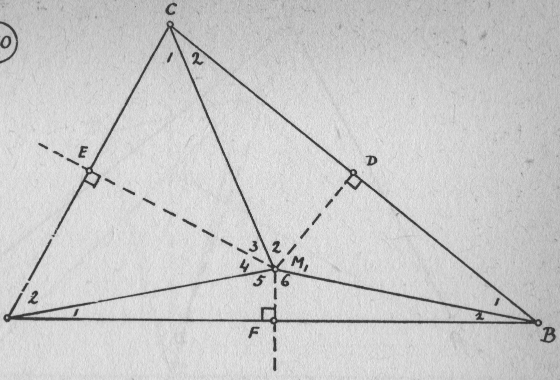
Bij de *hoogtelijnen*, die elkaar in H snijden: (fig. 161)
$\angle A_1 = 90° - B.$ $\angle B_1 = 90° - C.$ $\angle C_1 = 90° - A.$
$\angle A_2 = 90° - C.$ $\angle B_2 = 90° - A.$ $\angle C_2 = 90° - B.$
$\angle H_1 = \angle C.$ $\angle H_3 = \angle A.$ $\angle H_5 = \angle B.$
$\angle H_2 = \angle B.$ $\angle H_4 = \angle C.$ $\angle H_6 = \angle A.$

Bij D, E en F zijn de hoeken 90°.

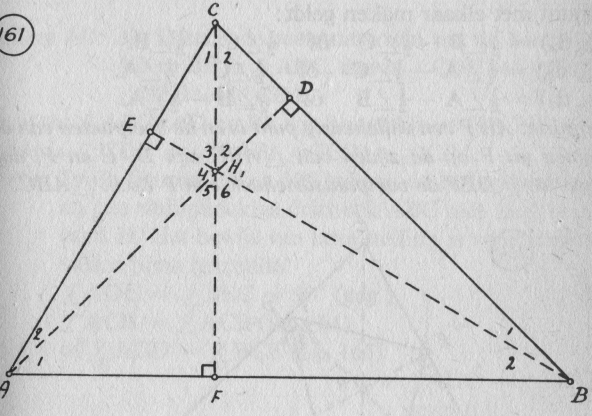
Bij de *bissectrices*, die elkaar in I snijden: (fig. 162)
$\angle A_1 = \frac{1}{2}\angle A$ $\angle D_1 = \angle B + \frac{1}{2}\angle A.$
$\angle A_2 = \frac{1}{2}\angle A.$ $\angle D_2 = \angle C + \frac{1}{2}\angle A.$
$\angle B_1 = \frac{1}{2}\angle B.$ $\angle E_1 = \angle C + \frac{1}{2}\angle B.$
$\angle B_2 = \frac{1}{2}\angle B.$ $\angle E_2 = \angle A + \frac{1}{2}\angle B.$
$\angle C_1 = \frac{1}{2}\angle C.$ $\angle F_1 = \angle A + \frac{1}{2}\angle C.$
$\angle C_2 = \frac{1}{2}\angle C.$ $\angle F_2 = \angle B + \frac{1}{2}\angle C.$
$\angle I_1 = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B.$
$\angle I_2 = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C.$
$\angle I_3 = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C.$
$\angle I_4 = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B.$
$\angle I_5 = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C.$
$\angle I_6 = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C.$

Bij de *zwaartelijnen*, die elkaar in Z snijden, zijn de hoeken niet op eenvoudige wijze in de hoeken van een driehoek uit te drukken. Wel is er een trigonometrische betrekking: (fig. 163)
$\sin C_1 : \sin C_2 = a : b.$ $\sin C_1 : \sin C_2 = \sin A : \sin B,$ en evenzo bij de andere zwaartelijnen.

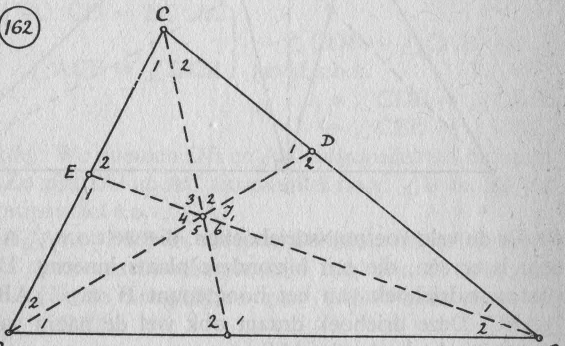
160

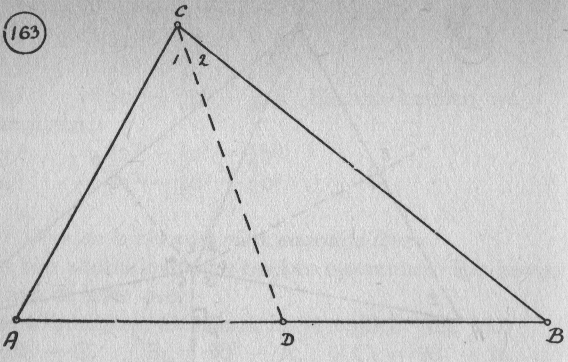

C
1
2
E
D
3
2
4
M_1
5
6
2
1
1
2
A
F
B

161


C
1
2
D
E
3
2
4
H_1
5
6
2
1
1
2
A
F
B

162

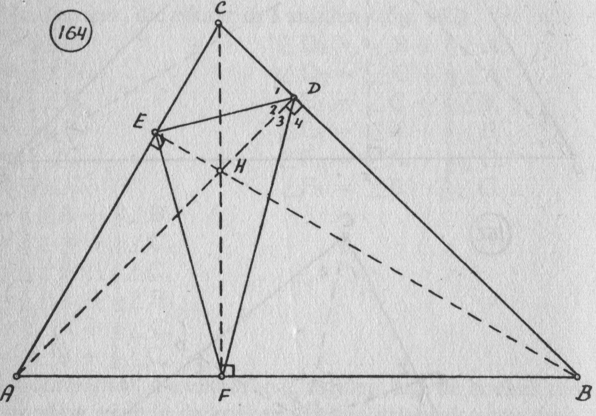

C
1
2
D
1
2
E
2
1
3
2
4
I_1
5
6
2
1
2
1
1
2
A
F
B



Voor de hoek die de *hoogtelijn* en de *bissectrice* uit hetzelfde hoekpunt met elkaar maken geldt:

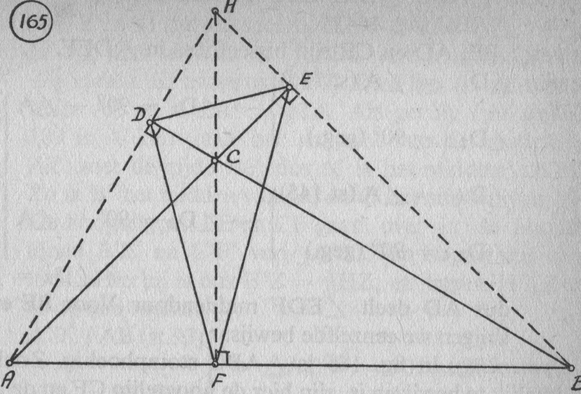
$\angle(h_a, d_a) = \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C$ òf $\frac{1}{2}\angle C - \frac{1}{2}\angle B$.
$\angle(h_b, d_b) = \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C$ òf $\frac{1}{2}\angle C - \frac{1}{2}\angle A$.
$\angle(h_c, d_c) = \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B$ òf $\frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle A$.

Definitie: Als P een willekeurig punt is en de voetpunten van de loodlijnen uit P op de zijden van △ABC zijn D, E en F, dan noemen we △DEF de voetpuntsdriehoek van P t.o.v. △ABC.



Onder de vele voetpuntsdriehoeken, die we t.o.v. △ABC hebben, is er één, die een bijzondere plaats inneemt. Dat is de voetpuntsdriehoek van het hoogtepunt H van △ABC t.o.v. △ABC. Deze driehoek draagt ook wel de naam van *orthocentrische driehoek*. (fig. 164).

(165)



Stelling 145: **Als D en E de voetpunten zijn van de hoogtelijnen AD en BE in △ABC, dan is ∠CDE = ∠CAB en ∠CED = ∠CBA.**

Gegeven: △ABC, AD en BE zijn hoogtelijnen. (fig. 164 en 165)

Te bew.: ∠CDE = ∠CAB, ∠CED = ∠CBA.

Bewijs: In de figuren 164 en 165 hebben we een scherphoekige en een stomphoekige driehoek ABC met hun hoogtepunt H. Het bewijs van deze stelling is voor beide gevallen bijna hetzelfde.

∠ADC = ∠BEC = 90° (geg.)
∠ACB = ∠ACB (fig. 164)
òf ∠ACD = ∠BCE (fig. 165) } →

→ △ADC ~ △BEC →
geval h.h.

→ EC : CD = BC : AC
∠ACB = ∠DCE } → △CDE ~ △CAB →
geval z.h.z.

→ ∠CDE = ∠CAB.
→ ∠CED = ∠CBA.

Opmerking: We noemen DE en AB *antiparallel* ten opzichte van ∠C. Zo zijn DF en AC antiparallel t.o.v. ∠B en EF en BC zijn antiparallel t.o.v. ∠A.

Stelling 146: **Als △DEF de voetpuntsdriehoek van het hoogtepunt van de scherphoekige driehoek ABC is, dan zijn de hoogtelijnen van △ABC bissectrices in △DEF.**

Gegeven: $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ is de voetpuntsdriehoek van H t.o.v. $\triangle ABC$ (fig. 164)

Te bew.: BE, AD en CF zijn bissectrices in $\triangle DEF$.

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\angle D_1 = \angle A \text{ (st.145)} \\ \angle D_{1,2} = 90^\circ \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle D_2 = 90^\circ - \angle A$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle D_4 = \angle A \text{ (st.145)} \\ \angle D_{3,4} = 90^\circ \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle D_3 = 90^\circ - \angle A$$

$$\rightarrow \angle D_2 = \angle D_3,$$

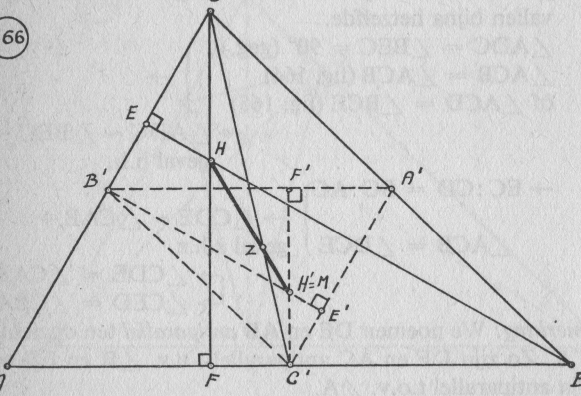
dus AD deelt $\angle EDF$ middendoor. Voor BE en CF krijgen we eenzelfde bewijs.

Opmerking: In fig. 165 is $\triangle ABC$ stomphoekig. Zoals gemakkelijk te bewijzen is, zijn hier de hoogtelijn CF en de zijden AC en BC de bissectrices van de voetpuntsdriehoek DEF. Als $\triangle ABC$ stomphoekig is, kan men dus beter geval voor geval nagaan, hoe de situatie is.

6. *Rechte van Euler*

We besluiten nu dit hoofdstuk met een andere 'merkwaardige' lijn: namelijk *de rechte van Euler*.

166



Stelling 147: **Als H het hoogtepunt, Z het zwaartepunt en M het middelpunt van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$ is, dan liggen H, Z en M op een rechte (de rechte van Euler) en wel zo, dat HZ = 2 ZM.**

Gegeven: $\triangle ABC$ met H, Z en M.
Te bew.: H, Z en M op één rechte, HZ = 2 ZM.
Bewijs: In fig. 166 hebben we $\triangle ABC$ vermenigvuldigd met $-\frac{1}{2}$ vanuit het zwaartepunt Z. Dan ligt A′ op zwaartelijn AZ en is $ZA' = \frac{1}{2}ZA$. Als gevolg van stelling 139 is A′ dus juist het snijpunt van de zwaartelijn AZ, met de zijde BC, dus A′ is het midden van BC. Zo is B′ het midden van AC en C′ het midden van AB. De hoogtelijnen BE en CF gaan over in de hoogtelijnen B′E′ en C′F′ van $\triangle A'B'C'$ en H gaat dus over in H′. Hierbij is dus $H'Z = \frac{1}{2}HZ$, en liggen H′, Z en H op één rechte.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}A'B' /\!/ AB\ \text{(st.93)}\\ \angle F_1 = 90^\circ\ \text{(z.b.)}\end{array}\right\}\rightarrow \angle AC'F' = 90^\circ\ \text{(st.7b)}\\ AC' = C'B\ \text{(z.b.)}\end{array}\right\}\rightarrow C'F'$$

is de middelloodlijn van AB (def.). Op dezelfde manier bewijzen we: B′E′ is de middelloodlijn van AC. Het snijpunt H′ van C′F′ en B′E′ is dus het snijpunt van de middelloodlijnen van $\triangle ABC$, dus H′ en M zijn samenvallende punten. Hierboven is al aangetoond, dat $H'Z = \frac{1}{2}HZ$ en dat H′, Z en H op één rechte liggen. Omdat H′ en M samenvallen mogen we dus zeggen: $MZ = \frac{1}{2}HZ$, dus HZ = 2 MZ en M, Z en H liggen op één rechte. Deze rechte heet de *rechte van Euler.*

Opmerking: Later zullen we zien, dat op deze rechte *midden* tussen H en M nog een punt N ligt, dat middelpunt is van de zogenaamde *negenpuntscirkel* of *cirkel van Feuerbach.*

XI. OPPERVLAKTE

A. ALGEMEEN

In hoofdstuk II hebben we het lijnstuk leren kennen, als een aan beide zijden begrensd gedeelte van een rechte. In dit hoofdstuk zullen we spreken over vlakstukken.

Definitie: Een vlakstuk is een aan alle kanten begrensd deel van het vlak. Zo hebben we o.a. driehoekige, vierhoekige en veelhoekige vlakstukken.

Definitie: Een driehoekig vlakstuk is de verzameling van punten, die op de zijden van een driehoek of binnen de driehoek liggen. We onderscheiden bij een vlakstuk inwendige punten en grenspunten.

Definitie: Een punt P is een inwendig punt van een vlakstuk, als er een cirkel (P, r) bestaat, waarvoor geldt, dat alle punten, die binnen deze cirkel liggen, punten van het vlakstuk zijn.

Definitie: Een punt Q is een grenspunt van een vlakstuk, als Q een punt van het vlakstuk is en als er geen cirkel (P, r) bestaat, waarvoor geldt, dat alle punten, die binnen deze cirkel liggen, punten van het vlakstuk zijn.

Nu we gedefinieerd hebben, wat we onder inwendige punten en grenspunten verstaan, kunnen we ook aangeven, wat we met de som van twee vlakstukken bedoelen.

Definitie: Een vlakstuk V is de som van enige andere vlakstukken, als voor ieder punt P van V geldt: 1. P is een punt van minstens één van die andere vlakstukken. 2. P is een inwendig punt van hoogstens één van die andere vlakstukken en als voor ieder punt Q van één van die andere vlakstukken geldt, dat Q ook een punt van V is.

Evenals bij de lijnstukken het geval was, kunnen we bewijzen (al is dat geen eenvoudige zaak), dat we aan ieder vlakstuk een bepaald positief maatgetal kunnen toevoegen. Deze maatgetallen voldoen aan de volgende voorwaarden: 1. Bij congruente vlakstukken (dat zijn vlakstukken die door een verplaatsing in elkaar kunnen overgaan) behoren gelijke maatgetallen. 2. Bij elk positief maatgetal behoort minstens één vlakstuk. 3. Het maatgetal van de som van twee of meer vlakstukken is de som van de maatgetallen van die vlakstukken.

Definitie: Twee vlakstukken hebben gelijke oppervlakte, als ze hetzelfde maatgetal hebben.

In het bijzonder is dit dus het geval, als twee vlakstukken congruent zijn, maar dat is niet noodzakelijk. Ook twee niet-congruente vlakstukken kunnen hetzelfde maatgetal hebben. Als we van twee vlakstukken zeggen, dat ze *gelijk* zijn, dan bedoelen we daar alleen mee, dat ze dezelfde oppervlakte hebben, maar niet dat ze congruent zijn.

Definitie: Een vlakstuk V is groter (kleiner) dan een vlakstuk W, als het maatgetal van V groter (kleiner) is dan het maatgetal van W.

Als we van een vlakstuk het maatgetal geven, dat moet dit gevolgd worden door de aanduiding van een bepaalde vlakstukeenheid. Deze vlakstukeenheid is een vlakstuk met het maatgetal 1. Meestal nemen we hiervoor een vierkant, waarvan de zijden het maatgetal 1 hebben. Op deze manier is de oppervlakte-eenheid gekoppeld aan de lengte-eenheid. Om de lengte-eenheid en de oppervlakte-eenheid niet te verwarren, zetten we bij de naam van de lengte-eenheid meestal een exponent 2, of voor de naam van de lengte-eenheid het woord 'vierkante', als we de oppervlakte-eenheid bedoelen.

Definitie: Onder de oppervlakte van een vlakstuk verstaan we het maatgetal van dat vlakstuk gevolgd door de naam van de gebruikte oppervlakte-eenheid.

Definitie: Onder de verhouding van de oppervlakten van twee vlakstukken V en W verstaan we de verhouding van de maatgetallen van V en W bij gebruik van dezelfde oppervlakte-eenheid.

B. BIJZONDERE FIGUREN

Stelling 148: **Als twee rechthoeken gelijke bases hebben, dan verhouden hun oppervlakten zich als hun hoogten.**

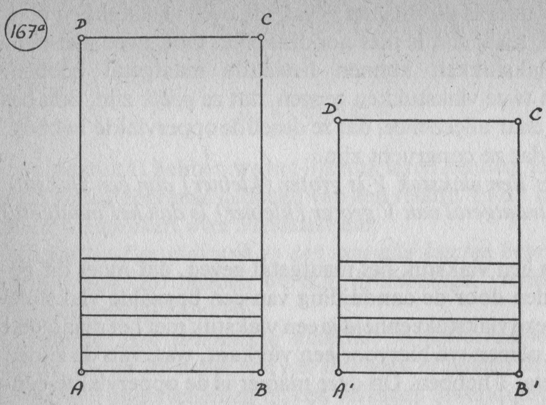
Gegeven: Rechthoek ABCD en rechthoek A′B′C′D′, AB = A′B; de oppervlakte van ABCD is O, de oppervlakte van A′B′C′D′ = O′.

Te bew.: O : O′ = AD : A′D′.

Bewijs: We zullen twee gevallen onderscheiden:

1. De verhouding van AD en A′D′ is meetbaar. (fig. 167a)
2. De verhouding van AD en A′D′ is onmeetbaar. (fig. 167b)

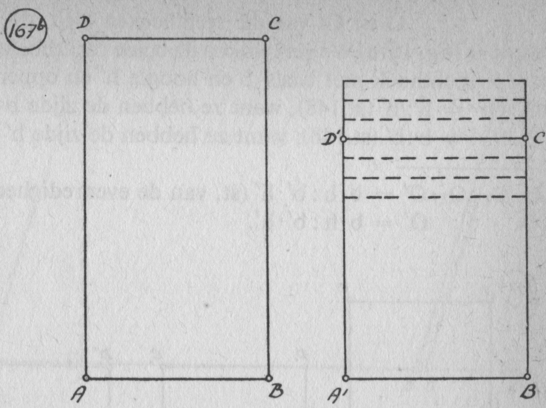
Geval 1: AD : A′D′ = p : q, waarbij p en q natuurlijke getallen zijn. Als de verhouding van AD en A′D′ meetbaar is,



namelijk p : q, dan betekent dat, dat AD en A′D′ een gemene maat a hebben, zodanig dat AD = p·a en A′D′ = q·a. We kunnen nu AD in p en A′D′ in q gelijke delen a verdelen. Als we in ABCD door de deelpunten lijnen trekken, evenwijdig aan AB en in A′B′C′D′ lijnen evenwijdig aan A′B′, dan wordt ABCD verdeeld in p rechthoeken en A′B′C′D′ in q rechthoeken. Al deze rechthoeken zijn congruent en hebben dus dezelfde oppervlakte. Aangezien de p rechthoeken, waarin ABCD verdeeld is, voldoen aan de definitie van som, is rechthoek ABCD de som van de p rechthoeken, waarin ABCD is verdeeld. Maar dan is het maatgetal van ABCD gelijk aan de som van de maatgetallen van die p rechthoeken. Als bij ieder van die rechthoeken het maatgetal m behoort, bij keuze van een bepaalde oppervlakte-eenheid, dan is het maatgetal van ABCD dus p·m. Zo vinden we voor het maatgetal van A′B′C′D′ q·m. Volgens de definitie verhouden de oppervlakten van ABCD en A′B′C′D′ zich als hun maatgetallen, dus O : O′ = p·m : q·m, of

$$\left.\begin{array}{l} O : O' = p : q \\ \\ AD : A'D' = p : q \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow O : O' = AD : A'D'.$$

Geval 2: De verhouding van AD en A′D′ is *onmeetbaar*. (fig. 167b) Stel dat A′D′/AD = k, dus A′D′ = k·AD, waarin k een onmeetbare snede is in het gebied van de positieve meetbare getallen. We kunnen nu de getallen indelen in twee klassen: 1. De lage klasse bevat de positive meetbare getallen p_i/q_i, waarvoor geldt $(p_i/q_i) < k$ (voor iedere i). 2. De hoge klasse bevat de positieve meetbare getallen r_i/s_i, waarvoor



geldt: $(r_i/s_i) > k$ (voor iedere i).
Stel dat de rechthoek ABCD het maatgetal m heeft, dan is er een serie rechthoeken met basis A′B′ en hoogte $(p_i/q_i) \cdot AD$. Omdat $(p_i/q_i) < k$ is, is de hoogte van deze rechthoeken kleiner dan $k \cdot AD$, dus kleiner dan A′D′. Volgens geval 1 zijn de maatgetallen van deze rechthoeken $(p_i/q_i) \cdot m$ en omdat deze rechthoeken kleiner zijn dan A′B′C′D′ is het maatgetal van rechthoek A′B′C′D′ dus groter dan de maatgetallen $(p_i/q_i) \cdot m$ van deze rechthoeken. Zo is er een tweede serie rechthoeken met basis A′B′ en hoogte $(r_i/s_i) \cdot AD$. Omdat $(r_i/s_i) > k$ is, is de hoogte van deze rechthoeken groter dan $k \cdot AD$ dus groter dan A′D′. Deze rechthoeken zijn dus groter dan A′B′C′D′ en volgens geval 1 zijn de maatgetallen van deze rechthoeken $(r_i/s_i) \cdot m$. Het maatgetal van rechthoek A′B′C′D′ is dus kleiner dan de maatgetallen $(r_i/s_i) \cdot m$, van deze tweede serie rechthoeken.
Het maatgetal van A′B′C′D′ is dus groter dan m maal ieder getal van de lage klasse en kleiner dan m maal ieder getal van de hoge klasse van de onmeetbare snede, die het onmeetbare getal k bepaalt. Het maatgetal van A′B′C′D′ is dus blijkbaar juist gelijk aan m maal het onmeetbare getal k, dus $m \cdot k$. Dus

$$\left.\begin{array}{l} O : O' = m : m \cdot k \rightarrow O : O' = 1 : k \\ A'D'/AD = k \text{ (geg.)} \rightarrow AD : A'D' = 1 : k \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow O : O' = AD : A'D'$.

Stelling 149: **Als de maatgetallen van de basis en de hoogte van twee rechthoeken gelijk zijn aan b en h, respectievelijk b′ en h′, dan verhouden de oppervlakten**

O en O′ van die rechthoeken zich als b·h : b′·h′.

Bewijs: (fig. 167c) We vergelijken de beide rechthoeken met een derde rechthoek met basis b en hoogte h′ en oppervlakte O_1.

$O : O_1 = h : h'$ (st.148), want ze hebben de zijde b gelijk.

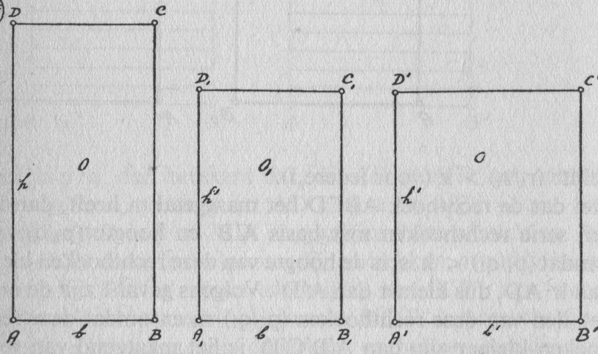
$O_1 : O' = b : b'$ (st.148), want ze hebben de zijde h′ gelijk.

———————— ×

$O \cdot O_1 : O_1 \cdot O' = b \cdot h : b' \cdot h'$ (st. van de evenredigheden) of

$O \quad : \quad O' = b \cdot h : b' \cdot h'$.

167c



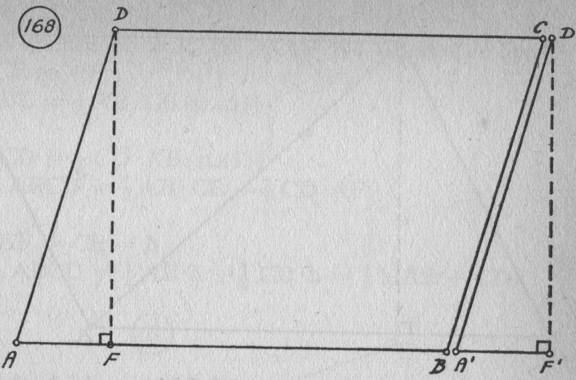
Opmerking: Als we de maatgetallen van basis en hoogte van beide rechthoeken laten volgen door de gebruikte lengte-eenheid, dan kunnen we het maatgetal van de rechthoek laten volgen door een oppervlakte-eenheid. Deze oppervlakte-eenheid is een vierkant, waarvan de zijden het maatgetal één hebben, uitgedrukt in de lengte-eenheid. We komen zo tot de volgende stellingen.

Stelling 150: **De oppervlakte van een rechthoek is het produkt van basis en hoogte.**

Stelling 151: **De oppervlakte van een vierkant is het kwadraat van een zijde van het vierkant.**

Stelling 152: **De oppervlakte van een parallellogram is gelijk aan het produkt van de basis en de hoogte van het parallellogram.**

Bewijs: We tekenen hoogtelijn DF. Als ∠A scherp is ligt F tussen A en B. We verschuiven nu △AFD volgens de vector (AB). Dan komt A′ in B en omdat CD = BA en CD // BA is, komt D′ in C, Omdat F op AB ligt, komt F′ op het verlengde van AB, zodanig, dat FF′ = AB. Geen enkel punt van vlak-



stuk A′F′D′ is inwendig punt van vlakstuk ABCD.

$\angle AFD = \angle A'F'D'$ (translatie) →
→ opp. AFD = opp. A′F′D′
opp. ABCD = opp. AFD + opp. FBCD
} →

→ opp. ABCD = opp. A′D′F′ + opp. FBCD. We hebben reeds gezien, dat F′ op het verlengde van AB ligt, dus opp. ABCD = opp. FF′D′D.

FF′ = AB
DD′ = AB
} → FF′ = DD′
AB // CD (parm.) → FF′ // DD′
} →

→ FF′D′D is een parm. (st.40)
$\angle F = 90°$ (z.b.)
} →

→ FF′D′D is een rechthoek. (def.)

opp. FF′D′D = FF′ × DF (st.150)
FF′ = AB
} →

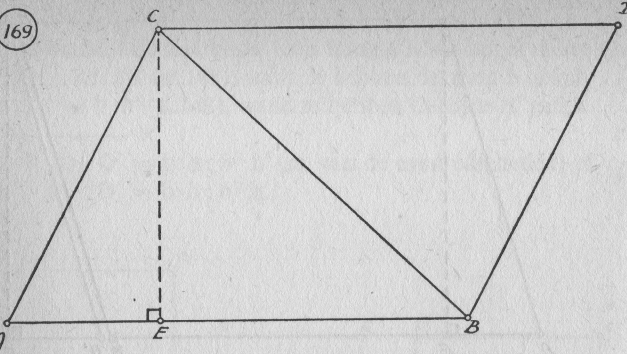
→ opp. FF′D′D = AB × DF
opp. FF′D′D = opp. ABCD (z.b.)
} →

→ opp. ABCD = AB × DF.

Stelling 153: **De oppervlakte van een driehoek is gelijk aan het halve produkt van de basis en de hoogtelijn op de basis.**

Bewijs: (fig. 169) We tekenen door C een rechte evenwijdig aan AB en door B een rechte evenwijdig aan AC. Deze rechten snijden elkaar in D. Volgens de definitie is ABDC nu

169



een parm. CB verdeelt parm. ABDC in twee driehoeken ABC en BCD.

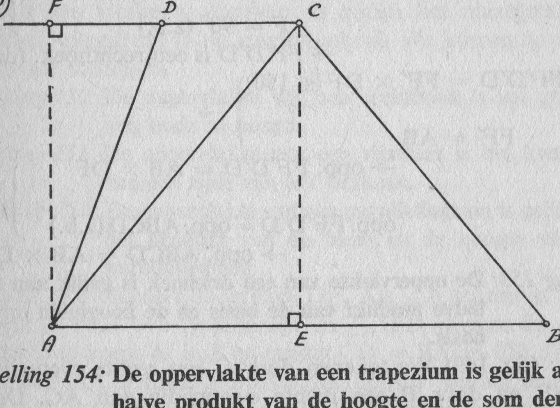
$$\text{ABDC is een parm.} \rightarrow \left.\begin{array}{l} AC = BD \\ AB = DC \\ BC = BC \end{array}\right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle BCD. \text{ geval Z.Z.Z.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dus opp. } ABC = \text{opp. } BCD \\ \text{opp. } ABC + \text{opp. } BCD = \text{opp. } ABCD \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \rightarrow \text{opp. } ABC = \tfrac{1}{2} \text{ opp. } ABCD \\ \text{opp. } ABCD = AB \times CE \text{ (st.152)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{opp. } ABC = \tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot CD.$$

170



Stelling 154: **De oppervlakte van een trapezium is gelijk aan het halve produkt van de hoogte en de som der evenwijdige zijden van het trapezium.**

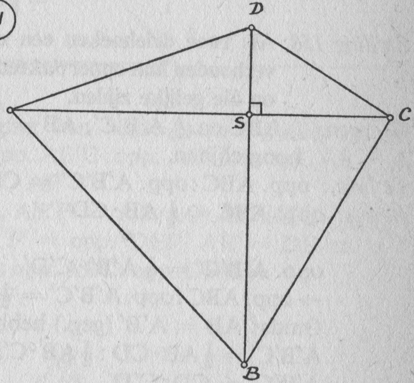
Bewijs: (fig. 170) Diagonaal AC verdeelt trapezium ABCD in twee driehoeken ABC en ACD. We tekenen de hoogtelijnen CE en AF.

$$\left.\begin{aligned}\text{opp. ABC} &= \tfrac{1}{2}\,\text{AB}\cdot\text{CE (st.153)}\\ \text{opp. ACD} &= \tfrac{1}{2}\,\text{CD}\cdot\text{AF (st.153)}\end{aligned}\right\}\rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\rightarrow \text{opp. ABCD} &= \tfrac{1}{2}\,\text{AB}\cdot\text{CE} + \tfrac{1}{2}\,\text{CD}\cdot\text{AF}\\ \text{AF} &= \text{CE} = \text{h}\end{aligned}\right\}\rightarrow$$

$$\rightarrow \text{opp. ABCD} = \tfrac{1}{2}\,\text{AB}\cdot\text{h} + \tfrac{1}{2}\,\text{CD}\cdot\text{h} = \tfrac{1}{2}\,\text{h(AB + CD)}.$$

171



Stelling 155: **De oppervlakte van een vierhoek, waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan, is gelijk aan het halve produkt van de diagonalen.**

Bewijs: (fig. 171) AC verdeelt vierhoek ABCD in twee driehoeken ACD en ACB.

$$\left.\begin{aligned}\text{opp. ACD} &= \tfrac{1}{2}\,\text{AC}\cdot\text{DS (st.153)}\\ \text{opp. ACB} &= \tfrac{1}{2}\,\text{AC}\cdot\text{BS (st.153)}\end{aligned}\right\}\rightarrow \text{opp. ABCD} =$$

$$\tfrac{1}{2}\,\text{AC}\cdot\text{DS} + \tfrac{1}{2}\,\text{AC}\cdot\text{BS} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{AC(DS + BS)} = \tfrac{1}{2}\,\text{AC}\cdot\text{DB}.$$

Stelling 156: **De oppervlakte van een ruit is gelijk aan het produkt van de basis en de hoogte en is ook gelijk aan het halve produkt van de diagonalen.**

Bewijs: Dit volgt onmiddellijk uit het feit, dat een ruit een parm. is en stelling 152 dus van toepassing is op de ruit. Volgens stelling 42 staan de diagonalen loodrecht op elkaar, dus ook stelling 155 mogen we toepassen op de ruit.

Stelling 157: **Als 2s de omtrek is van $\triangle ABC$ met zijden a, b en c, dan is de oppervlakte van $\triangle ABC$ gelijk aan $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.**

Bewijs: Stel CD is de hoogtelijn op de zijde AB, dan is

$$\left.\begin{array}{l} CD = h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{(st.143)} \\ \text{opp. } \triangle ABC = \tfrac{1}{2}\, AB \cdot CD = \tfrac{1}{2}\, c \cdot CD \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{opp. } \triangle ABC = \tfrac{1}{2}\, c \cdot \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Stelling 158: **Als twee driehoeken een zijde gelijk hebben, dan verhouden hun oppervlakten zich als de hoogtelijnen op die gelijke zijden.**

Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$, $AB = A'B'$, CD en $C'D'$ zijn hoogtelijnen.

Te bew.: opp. ABC : opp. $A'B'C' = CD : C'D'$.

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} \text{opp. } ABC = \tfrac{1}{2}\, AB \cdot CD \\ \text{opp. } A'B'C' = \tfrac{1}{2}\, A'B' \cdot C'D' \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow$ opp. ABC : opp. $A'B'C' = \tfrac{1}{2}\, AB \cdot CD : \tfrac{1}{2} A'B' \cdot C'D'$.
Omdat $AB = A'B'$ (geg.) hebben we opp. ABC : opp. $A'B'C' = \tfrac{1}{2}\, AB \cdot CD : \tfrac{1}{2}\, AB \cdot C'D'$, dus opp. ABC : opp. $A'B'C' = CD : C'D'$.

Op dezelfde manier kan de lezer de volgende stelling bewijzen.

Stelling 159: **Als twee driehoeken een hoogtelijn gelijk hebben, dan verhouden hun oppervlakten zich als de beide zijden waar die gelijke hoogtelijnen loodrecht op staan.**

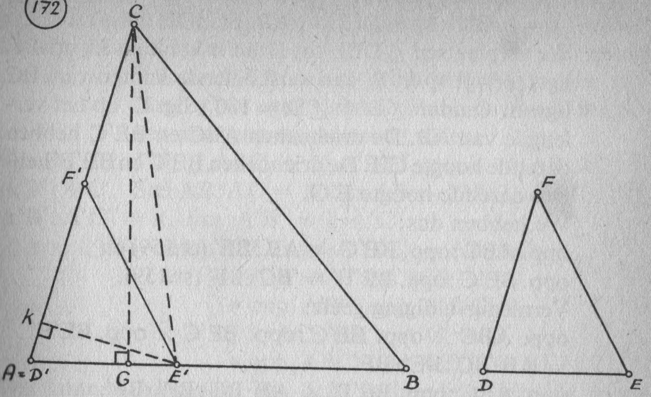
Stelling 160: **Als twee driehoeken een hoek gelijk hebben, dan verhouden hun oppervlakten zich als de produkten van de zijden om die gelijke hoeken.**

Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$, $\angle A = \angle D$. (fig. 172)

Te bew.: opp. ABC : opp. DEF = AB $\cdot$ AC : DE $\cdot$ DF.

Bewijs: We verplaatsen $\triangle DEF$ zodanig, dat D' in A komt en E' op AB. Omdat $\angle D = \angle A$ is, komt F' op AC. Trek $E'F'$ en $E'C$. $\triangle ABC$ en $\triangle AE'C$ hebben dezelfde hoogtelijn CH en $\triangle AE'C$ en $\triangle AE'F'$ hebben dezelfde hoogtelijn $E'G$. We hebben dus:
opp. ABC : opp. $AE'C = AB : AE'$ (st.159) en
opp. $AE'C$: opp. $AE'F' = AC : AF'$ (st.159).

(172)

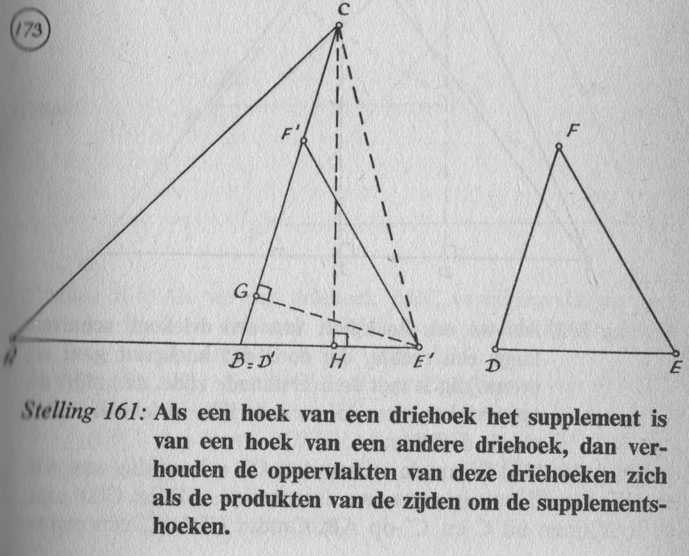


Vermenigvuldiging van beide evenredigheden geeft:
opp. ABC × opp. AE′C : opp. AE′C × opp. AE′F′ = AB · AC : AE′ · AF′

opp. ABC : opp. AE′F′ = AB · AC : AE′ · AF′.

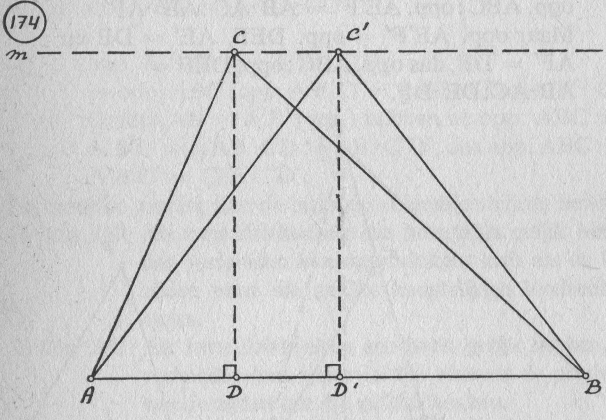
Maar opp. AE′F′ = opp. DEF, AE′ = DE en AF′ = DF, dus opp. ABC : opp. DEF = AB · AC : DE · DF.

(173)



Stelling 161: **Als een hoek van een driehoek het supplement is van een hoek van een andere driehoek, dan verhouden de oppervlakten van deze driehoeken zich als de produkten van de zijden om de supplementshoeken.**

Gegeven: $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$, $\angle B + \angle D = 180°$. (fig. 173)
Te bew.: opp. ABC : opp. DEF = AB·BC : DE·DF.
Bewijs: We verplaatsen $\triangle DEF$ tot D′ in B komt en F′ op BC ligt, terwijl A en E′ aan verschillende kanten van BC liggen. Omdat $\angle B + \angle D = 180°$, ligt E′ op het verlengde van AB. De driehoeken ABC en BE′C hebben dezelfde hoogte CH. De driehoeken BE′C en BE′F′ hebben dezelfde hoogte E′G.
We hebben dus:
opp. ABC : opp. BE′C = AB : BE′ (st.159) en
opp. BE′C : opp. BE′F′ = BC : BF′ (st.159).
Vermenigvuldiging geeft:
opp. ABC × opp. BE′C : opp. BE′C × opp. BE′F′
= AB·BC : BE′·BF′
opp. ABC : opp. BE′F′ = AB·BC : BE′·BF′.
Maar opp. BE′F′ = opp. DEF, BE′ = DE en BF′ = DF, dus opp. ABC : opp. DEF = AB·BC : DE·DF.



Stelling 162: **Als we een hoekpunt van een driehoek schuiven langs een rechte, die door dat hoekpunt gaat en evenwijdig is met de overstaande zijde, dan blijft de oppervlakte van de veranderlijke driehoek ABC steeds dezelfde.**

Bewijs: (fig. 174) Zij m de rechte door C evenwijdig aan AB en C′ een willekeurig punt van deze rechte. CD en C′D′ zijn de loodlijnen uit C en C′ op AB. Omdat CDD′C′ een recht-

hoek is, is CD = C'D'. De driehoeken ABC en ABC' hebben dezelfde basis en gelijke hoogte. Volgens stelling 153 hebben ze dan gelijke oppervlakte.

Stelling 163: **Als twee driehoeken gelijkvormig zijn, dan verhouden hun oppervlakten zich als de kwadraten van een paar corresponderende zijden.**

Bewijs: (fig. 175) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (geg.) $\rightarrow AB:AC = A'B':A'C'$. Stel $AB:AC = k$, dus $AB = k\cdot AC$, dan is ook $A'B':A'C' = k$, dus $A'B' = k\cdot A'C'$.

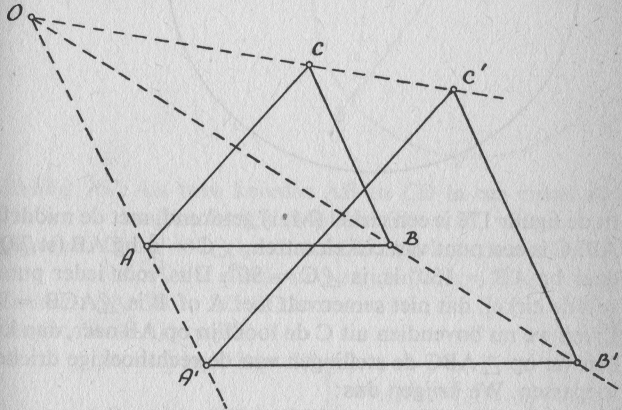
$\angle A = \angle D \rightarrow$ opp. ABC : opp. $A'B'C' = AB\cdot AC : A'B'\cdot A'C'$ (st. 160) $\rightarrow$

$\rightarrow$ opp. ABC : opp. $A'B'C' = k\cdot AC\cdot AC : k\cdot A'C'\cdot A'C' \rightarrow$

$\rightarrow$ opp. ABC : opp. $A'B'C' = AC^2 : A'C'^2$.

We kunnen aantonen, dat deze verhouding dezelfde is als $AB^2 : A'B'^2$ en als $BC^2 : B'C'^2$.

175



Stelling 164: **Als we een driehoek ABC vermenigvuldigen met k en driehoek A'B'C' is de produktfiguur, dan is opp. A'B'C' = $|k|^2$ · opp. ABC.**

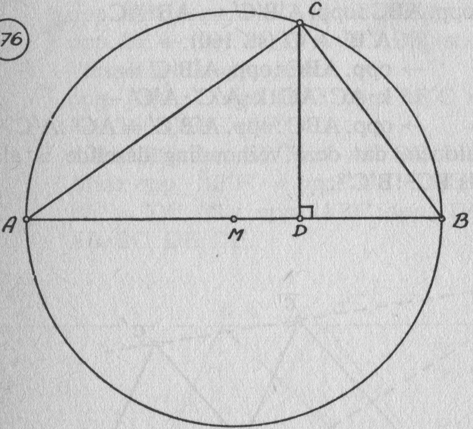
Bewijs: (fig. 175) $\triangle A'B'C'$ is de produktfiguur van $\triangle ABC$, dus $A'B' = |k|\cdot AB$ (st.93). Volgens de definitie is $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, dus opp. A'B'C' : opp. ABC = $A'B'^2 : AB^2$ en omdat $A'B' = |k|\cdot AB$ wordt dit: opp. A'B'C' : opp. ABC = $|k|^2\cdot AB^2 : AB^2 = |k|^2 : 1$, dus volgens de hoofdeigenschap is opp. A'B'C' = $|k|^2\cdot$ opp. ABC.

XII. DE CIRKEL
(vervolg)

We gaan nu de behandeling van de cirkel voortzetten. Allereerst enige stellingen over:

A. LIJNSTUKKEN IN DE CIRKEL

176



In de figuur 176 is een cirkel (M, r) getekend, met de middellijn AB. C is een punt van cirkelomtrek. $\angle C = \frac{1}{2}$ bg AB (st.73) en daar bg AB $= 180°$ is, is $\angle C = 90°$. Dus voor ieder punt C van de cirkel, dat niet samenvalt met A of B is $\angle ACB = 90°$. Laten we nu bovendien uit C de loodlijn op AB neer, dan kunnen we op $\triangle ABC$ de stellingen van de rechthoekige driehoek toepassen. We krijgen dus:

1. $AC^2 = AD \cdot AB$ } stelling 116.
2. $BC^2 = DB \cdot AB$ }
3. $AC^2 + BC^2 = AB^2$ }
4. $AD^2 + CD^2 = AC^2$ } stelling 117.
5. $BD^2 + CD^2 = BC^2$ }
6. $CD^2 = AD \cdot DB$ stelling 118.
7. $AC \cdot BC = CD \cdot AB$ stelling 119.

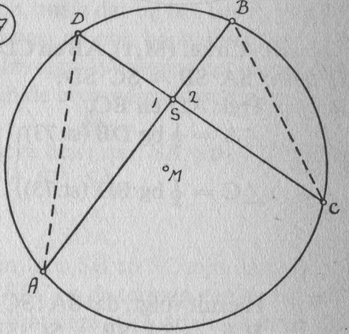
Van deze serie formules zullen we alleen de nummers 1, 2 en 6 opnieuw onder woorden brengen, maar nu voor het geval dat

ze in een cirkel voorkomen.

Stelling 165: **Als een koorde en een middellijn in een cirkel een gemeenschappelijk eindpunt hebben, dan is het kwadraat van de koorde gelijk aan het produkt van de middellijn en de projectie van die koorde op de middellijn. (formule 1 en 2)**

Stelling 166: **Als uit een punt van een cirkel een loodlijn is neergelaten op een middellijn van die cirkel, dan is het kwadraat van die loodlijn gelijk aan het produkt van de stukken, waarin die loodlijn de middellijn verdeelt. (formule 6)**

177



Stelling 167: **Als twee koorden AB en CD in een cirkel elkaar snijden in S, dan is SA · SB = SC · SD.**

Gegeven: Cirkel (M, r), AB en CD zijn koorden in de cirkel (M, r), die elkaar in S snijden. (fig. 177)

Te bew.: SA·SB = SC·SD.

Bewijs: Trek AD en BC.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \tfrac{1}{2}\text{ bg DB (st.73)}\\ \angle C = \tfrac{1}{2}\text{ bg DB (st.73)}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle A = \angle C\\ \angle S_1 = \angle S_2\end{array}\right\} \rightarrow$$

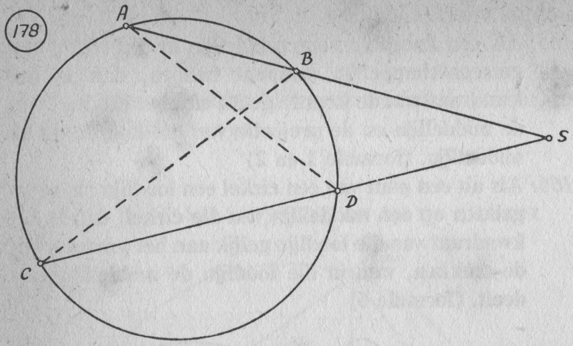
Volgens stelling 1 is: $\angle S_1 = \angle S_2$

$\rightarrow \triangle ASD \sim \triangle CSB$.
geval h.h.

Hieruit volgt, dat SA : SC = SD : SB

H.E. → SA·SB = SC·SD.

Stelling 168: **Als twee snijlijnen AB en CD van een cirkel (M, r) elkaar in een punt S buiten de cirkel snijden, dan is SA·SB = SC·SD.**

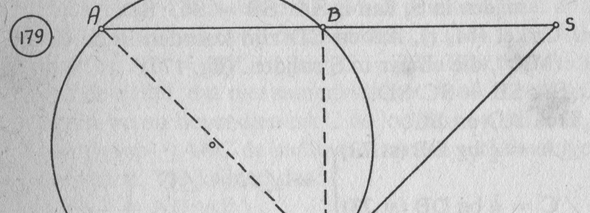


Gegeven: Cirkel (M, r), AB en CD snijden elkaar in S. (fig. 178)
Te bew.: SA·SB = SC·SD.
Bewijs: Trek AD en BC.

$\left.\begin{array}{l}\angle A = \frac{1}{2}\text{ bg DB (st.73)}\\ \angle C = \frac{1}{2}\text{ bg BD (st.73)}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle A = \angle C\\ \angle S = \angle S\end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \triangle ADS \sim \triangle CBS,$
geval h.h.

Hieruit volgt, dat SA : SC = SD : SB
H.E. → SA·SB = SC·SD.



Stelling 169: **Als een snijlijn AB van een cirkel en een raaklijn in C aan die cirkel elkaar in S snijden, dan is SC^2 = SA·SB.**
Gegeven: Cirkel (M, r), snijlijn AB, CS raakt de cirkel in C. (fig. 179)

Te bew.: $SC^2 = SA \cdot SB$.
Bewijs: Trek AC en BC.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \frac{1}{2}\text{ bg BC (st.73)}\\ \\ \angle BCS = \frac{1}{2}\text{ bg BC (st.76)}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle A = \angle BCS\\ \\ \angle S = \angle S\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \triangle ACS \sim \triangle CBS.$$
geval h.h.

Hieruit volgt, dat $SC : SB = SA : SC$
H.E. $\rightarrow SC^2 = SA \cdot SB$.

Opmerking: Als we moeten bewijzen, dat twee produkten van lijnstukken aan elkaar gelijk zijn, dan verloopt het bewijs heel vaak volgens eenzelfde patroon, zoals dat bij het bewijs van de stellingen 167 t/m 169 is toegepast en ook bij stelling 116, 118 en 119. De gang van zaken is als volgt: We passen het omgekeerde van de hoofdeigenschap van de evenredigheden toe op de te bewijzen betrekking.
Bij stelling 167 krijgen we dus: te bewijzen: $SA \cdot SB = SC \cdot SD$.
Omgekeerde H.E. $\rightarrow SB : SC = SD : SA$.

$$\searrow \swarrow \qquad \searrow \swarrow$$
$$\triangle SBC \qquad \triangle SDA$$

De termen van de eerste reden, dus SB en SC zijn dan zijden van een driehoek, namelijk $\triangle SBC$ en de termen van de tweede reden zijn zijden van $\triangle SDA$. Van deze twee driehoeken trachten we dan de gelijkvormigheid te bewijzen. Het bewijs verloopt dan verder zoals bij stelling 167 t/m 169 is gebleken. Als het omgekeerde van de hoofdeigenschap geen twee driehoeken oplevert, is er nog een mogelijkheid, namelijk het verwisselen van de tweede en derde term van de evenredigheid. Vinden we dan nog geen twee driehoeken, dan moeten we het bewijs op een andere manier trachten te leveren, of één of meer van de lijnstukken uit de evenredigheid vervangen door andere even lange lijnstukken.

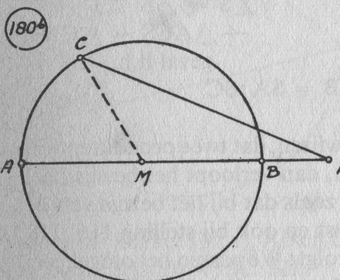
B. ONDERLINGE LIGGING VAN TWEE CIRKELS

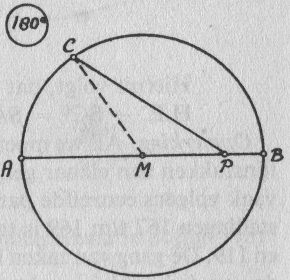
We beginnen met het bewijzen van een hulpstelling.
Stelling 170: **Als de afstand van een punt P tot het middelpunt van de cirkel (M, r) gelijk is aan d en C is een punt van de cirkel, dan is $|d - r| \leqslant PC \leqslant d + r$. Er is juist één punt C op de cirkel, waarvoor $|d - r| =$**

PC is en ook juist één punt, waarvoor PC = d + r.

Gegeven: Cirkel (M, r), PM snijdt de cirkel in A en B, PM is d. (fig. 180a en 180b)

Te bew.: $|d - r| \leqslant PC \leqslant d + r$.





Bewijs: Uit de figuren 180a en 180b zien we, dat er twee mogelijkheden zijn, namelijk dat P binnen de cirkel ligt, of dat P buiten de cirkel ligt.

Als C met A samenvalt is $PC = PA = PM + MA \rightarrow PC = d + r$.

Als C met B samenvalt is $PC = PB = |PM - BM| \rightarrow PC = |d - r|$.

Voor ieder ander punt C van de cirkel, krijgen we, als we MC trekken:

$$\left.\begin{array}{l} PC < PM + MC \text{ (st.19)} \\ MA = MC = r \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow PC < PM + MA \rightarrow PC < d + r.$$

$$\left.\begin{array}{l} PC > |PM - MC| \text{ (st.20)} \\ MB = MC = r \end{array}\right\} \rightarrow$$

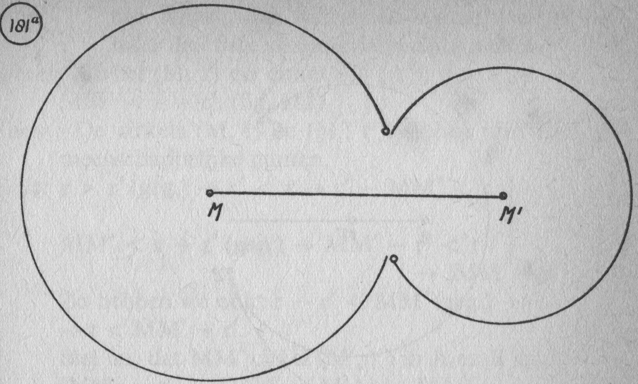
$$\rightarrow PC > |PM - MB| \rightarrow PC > |d - r|.$$

Samenvattend: $|d - r| \leqslant PC \leqslant d + r$, met slechts één punt, waarvoor $|d - r| = PC$ is en ook slechts één punt, waarvoor $PC = d + r$ is.

Stelling 171: **Als de afstand van de middelpunten van twee cirkels groter is dan de som van hun stralen, dan liggen die cirkels buiten elkaar.**

Gegeven: Cirkel (M, r) en cirkel (M′, r′), $MM' > r + r'$. (fig. 181a)

Te bew.: Cirkel (M, r) en cirkel (M′, r′) liggen buiten elkaar.



Bewijs: Stel C is een willekeurig punt van cirkel (M, r).
We passen nu stelling 170 toe op punt M′ en cirkel (M, r).

$MM' > r + r'$ (geg.) $\rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} \rightarrow MM' - r > r' \rightarrow |MM' - r| > r' \\ M'C \geqslant |MM' - r| \text{ (st.170)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow M'C > r'.$$

Nu stelling 170 toepassen op punt M en cirkel (M′, r′), als C′ een punt van cirkel (M′, r′) is.

$MM' > r + r'$ (geg.) $\rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} MM' - r' > r \rightarrow |MM' - r'| > r \\ MC' \geqslant |MM' - r'| \text{ (st.170)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

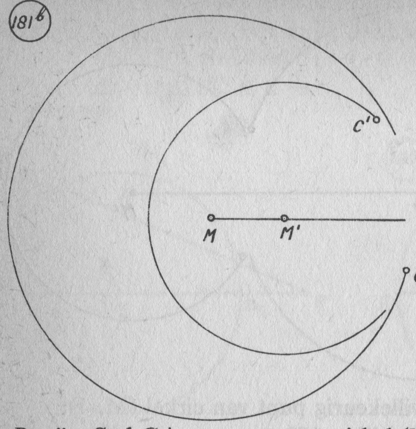
$$\rightarrow MC' > r.$$

We hebben nu gevonden: 1. $M'C > r'$, d.w.z., dat ieder punt C van cirkel (M, r) buiten cirkel (M′, r) ligt. (def.) 2. $MC' > r$, d.w.z., dat ieder punt C′ van cirkel (M′, r′) buiten cirkel (M, r) ligt (def.). Hieruit volgt, dat beide cirkels buiten elkaar liggen.

Stelling 172: **Als de afstand van de middelpunten van twee cirkels gelijk is aan de som van hun stralen, dan hebben die cirkels één en niet meer dan één gemeenschappelijk punt en liggen ze verder buiten elkaar.**

Gegeven: Cirkel (M, r) en cirkel (M′, r′), $MM' = r + r'$. (fig. 181b)

Te bew.: Cirkel (M, r) en cirkel (M′, r′) hebben juist één gemeenschappelijk punt.



Bewijs: Stel C is een punt van cirkel (M, r).

$MM' = r + r'$ (geg.) $\rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &MM' - r = r' \rightarrow |MM' - r| = r' \\ &M'C \geqslant |MM' - r| \text{ (st.170)} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow M'C \geqslant r'$.

Stel C′ is een punt van cirkel (M′, r′).

$MM' = r + r'$ (geg.) $\rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow MM' - r' = r \rightarrow |MM' - r'| = r \\ &MC' \geqslant |MM' - r'| \text{ (st.170)} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow MC' \geqslant r$.

We hebben nu gevonden: 1. $M'C \geqslant r'$, d.w.z., dat ieder punt C van cirkel (M, r) buiten cirkel (M′, r′) ligt behalve juist één punt C_1, waarvoor $M'C_1 = r'$ is en dat dus op cirkel (M′, r′) ligt. 2. $MC' \geqslant r$, d.w.z., dat ieder punt C′ van cirkel (M′, r′) buiten cirkel (M, r) ligt behalve juist één punt C_1' waarvoor $MC_1' = r$ en dat dus op cirkel (M, r) ligt. Maar dan moeten C_1 en C_1' wel samenvallende punten zijn. De cirkels (M, r) en (M′, r′) hebben dan juist één gemeenschappelijk punt C_1 en liggen verder buiten elkaar.

Definitie: Als twee cirkels juist één gemeenschappelijk punt P hebben, en verder geheel buiten elkaar liggen, dan raken deze cirkels elkaar uitwendig.

Stelling 173: **Als de afstand van de middelpunten van twee cirkels kleiner is dan de som en groter dan het verschil van**

hun stralen, dan hebben die cirkels twee en niet meer dan twee gemeenschappelijke punten.

Gegeven: Cirkel (M, r) en cirkel (M′, r′), $r > r'$, $r - r' < MM' < r + r'$. (fig. 182)

Te bew.: De cirkels (M, r) en (M′, r′) hebben juist twee gemeenschappelijke punten.

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} r > r' \text{ (geg.)} \rightarrow r' < r \rightarrow r' - MM' < r \\ MM' < r + r' \text{ (geg.)} \rightarrow MM' - r' < r \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow |MM' - r'| < r.$$

Zo hebben we ook: $r - r' < MM'$ (geg.) $\rightarrow$
$\rightarrow r < MM' + r'$.

Stel nu, dat MM′ cirkel (M′, r′) in A en B snijdt.

$$\left.\begin{array}{l} |MM' - r'| = |MM' - M'A| = MA \\ |MM' - r'| < r \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow MA < r$, dus A ligt binnen cirkel (M, r).

$$\left.\begin{array}{l} MM' + r' = MM' + M'B = MB \\ r < MM' + r' \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow r < MB$, dus B ligt buiten cirkel (M, r).

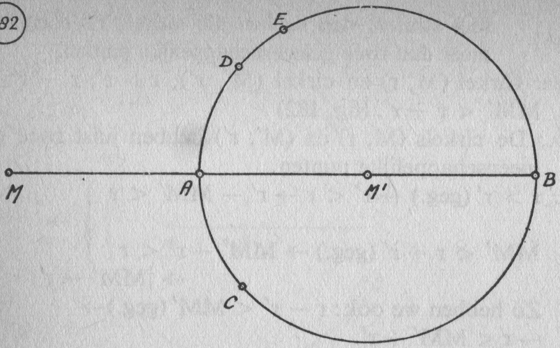
Direct uit de axioma's valt de volgende stelling te bewijzen:

Als A en B de eindpunten zijn van een boog AB van een cirkel (M′, r′) en A ligt binnen en B buiten een cirkel (M, r), dan ligt op boog AB een punt van cirkel (M, r).

Passen we deze stelling hier toe, dan ligt op de 'onderste' boog AB een punt C van cirkel (M, r) en op de 'bovenste' boog AB een punt D van cirkel (M, r). We nemen nu aan, dat er nog een derde punt E van cirkel (M, r) op één van de beide bogen AB ligt. We hebben dan: $CM' = DM' = EM'$, omdat de drie punten op cirkel (M′, r′) liggen. Verder is $CM = DM = EM$, omdat de drie punten op cirkel (M, r) liggen. De driehoeken MM′C, MM′D en MM′E hebben alle drie de basis MM′ en zijn dan congruent volgens geval Z.Z.Z. Hieruit volgt dat E òf met D óf met C moet samenvallen. Er zijn dus twee en niet meer dan twee punten van cirkel (M, r), die ook op cirkel (M′, r′) liggen. De beide cirkels hebben dus twee en niet meer dan twee gemeenschappelijke punten.

Opmerking: De lezer kan zelf nagaan, dat het bewijs onver-

(182)



anderd blijft gelden, als in figuur 182 het punt M binnen cirkel (M′, r′) ligt, dus tussen A en M′.

Stelling 174: **Als de afstand van de middelpunten van twee cirkels met ongelijke stralen gelijk is aan het verschil van hun stralen, dan hebben die cirkels één en niet meer dan één gemeenschappelijk punt en ligt de ene cirkel binnen de andere.**

Gegeven: Cirkel (M, r) en cirkel (M′, r′), $MM' = r - r'$, $r > r'$. (fig. 181b)

Te bew.: Cirkel (M, r) en cirkel (M′, r′) hebben juist één gemeenschappelijk punt.

Bewijs: Stel C is een punt van cirkel (M, r).

$$\left.\begin{array}{l} MM' = r - r' \text{ (geg.)} \rightarrow \\ \rightarrow MM' - r = -r' \rightarrow |MM' - r| = r' \\ M'C \geqslant |MM' - r| \text{ (st. 170)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow M'C \geqslant r'.$$

Stel C′ is een punt van cirkel (M′, r′).

$$\left.\begin{array}{l} MM' = r - r' \text{ (geg.)} \rightarrow MM' + r' = r \\ MC' \leqslant MM' + r' \text{ (st.170)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow MC' \leqslant r.$$

We hebben nu gevonden: 1. $M'C \geqslant r'$, d.w.z., dat ieder punt C van cirkel (M, r) buiten cirkel (M′, r′) ligt behalve juist één punt C_1, waarvoor $M'C_1 = r'$ is en dat dus op cirkel (M′, r′) ligt.

2. $MC' \leqslant r$, d.w.z., dat ieder punt C′ van cirkel (M′, r′) binnen cirkel (M, r) ligt behalve juist één punt C_1', waarvoor $MC_1' = r$ is en dat dus op cirkel (M, r)

ligt. Maar dan moeten C_1 en C_1' wel samenvallende punten zijn. De cirkels (M, r) en (M', r') hebben dan juist één gemeenschappelijk punt, terwijl cirkel (M', r') verder geheel binnen cirkel (M, r) ligt.

Definitie: Als twee cirkels juist één gemeenschappelijk punt P hebben en de ene cirkel ligt verder geheel binnen de andere cirkel, dan raken deze cirkels elkaar inwendig.

Opmerking: We spreken in de definitie van 'elkaar inwendig raken', hoewel dit volgens het gewone spraakgebruik eigenlijk onmogelijk is.

Stelling 175: **Als de afstand van de middelpunten van twee cirkels met ongelijke stralen kleiner is dan het verschil van hun stralen, dan ligt de ene cirkel geheel binnen de andere.**

Gegeven: Cirkel (M, r) en cirkel (M', r'), $r > r'$, $MM' < r - r'$. (fig. 181b)

Te bew.: Cirkel (M', r') ligt geheel binnen cirkel (M, r).

Bewijs: Stel C is een punt van cirkel (M, r).

$$\left.\begin{array}{l} MM' < r - r' \text{ (geg.)} \rightarrow r' < r - MM' \overset{1}{\rightarrow} \\ \qquad\qquad \overset{1}{\rightarrow} |r - MM| > r' \\ M'C \geqslant |MM' - r| \text{ (st.170)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow M'C > r'.$$

Stel C' is een punt van cirkel (M', r').

$$\left.\begin{array}{l} MM' < r - r' \text{ (geg.)} \rightarrow MM' + r' < r \\ MC' \leqslant MM' + r' \text{ (st.170)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow MC' < r.$$

We hebben nu gevonden: 1. $M'C > r'$, d.w.z., dat ieder punt C van cirkel (M, r) buiten cirkel (M', r') ligt. 2. $MC' < r$, d.w.z., dat ieder punt C' van cirkel (M', r') geheel binnen cirkel (M, r) ligt.

Het omgekeerde van de stellingen 171 t/m 175 kunnen we bewijzen uit het ongerijmde.

Stelling 176: **Als twee cirkels geheel buiten elkaar liggen, dan is de afstand van hun middelpunten groter dan de som van hun stralen.**

Stelling 177: **Als twee cirkels elkaar uitwendig raken, dan is de afstand van hun middelpunten gelijk aan de som van hun stralen.**

Stelling 178: **Als twee cirkels elkaar snijden, dan is de afstand van hun middelpunten kleiner dan de som en groter dan het verschil van hun stralen.**

Stelling 179: **Als twee cirkels met ongelijke stralen elkaar inwendig raken, dan is de afstand van hun middelpunten gelijk aan het verschil van hun stralen.**

Stelling 180: **Als een cirkel geheel binnen een andere cirkel ligt, dan is de afstand van hun middelpunten kleiner dan het verschil van hun stralen.**

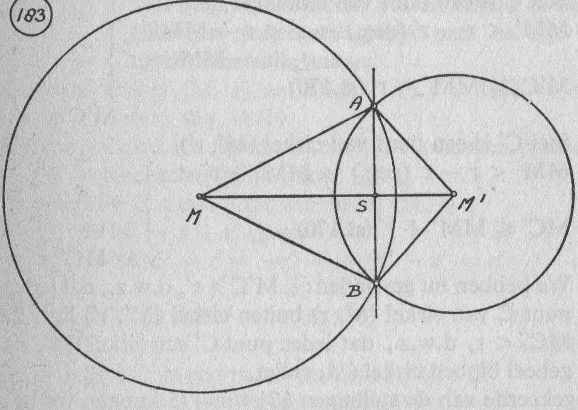
Definitie: Het lijnstuk, dat de middelpunten van twee cirkels verbindt, heet de centraal van die cirkels.

Definitie: Het lijnstuk, dat de snijpunten van twee snijdende cirkels verbindt, heet de gemeenschappelijke koorde van die cirkels.

Definitie: Een lijnstuk, dat door één snijpunt van twee snijdende cirkels gaat en niet door het andere en in beide cirkels koorde is, heet een dubbelkoorde van die cirkels.

Definitie: Twee cirkels, die hetzelfde middelpunt hebben, heten concentrische cirkels.

183

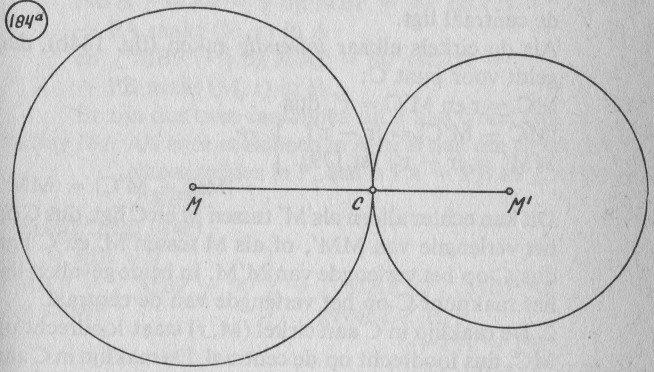


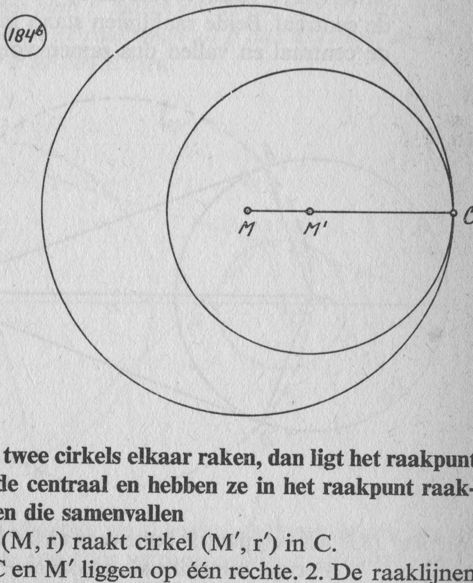
Stelling 181: **Als twee cirkels elkaar snijden, dan deelt de centraal de gemeenschappelijke koorde loodrecht middendoor.**

Gegeven: Cirkel (M, r) en cirkel (M′, r′), AB is een gemeenschappelijke koorde. (fig. 183)

Te bew.: AS = BS, $\angle S = 90^\circ$.

Bewijs: MA = MB = r $\xrightarrow{1}$
M′A = M′B = r′ $\xrightarrow{2}$
$\xrightarrow{1}$ M ligt op de middelloodlijn van AB (st.102)
$\xrightarrow{2}$ M′ ligt op de middelloodlijn van AB (st.102) } →
→ MM′ ligt op de middelloodlijn van AB, dus AS = BS en ∠S = 90°.





Stelling 182: **Als twee cirkels elkaar raken, dan ligt het raakpunt op de centraal en hebben ze in het raakpunt raaklijnen die samenvallen**

Gegeven: Cirkel (M, r) raakt cirkel (M′, r′) in C.

Te bew.: 1. M, C en M′ liggen op één rechte. 2. De raaklijnen in C aan de cirkels (M, r) en (M′, r′) vallen samen.

Bewijs: 1. Als de cirkels elkaar *uitwendig* raken (fig. 184a), dan geldt voor punt C:

$$\left.\begin{array}{l} MC = r \text{ en } M'C = r', \text{ dus } MC + M'C = r + r' \\ MM' = r + r' \text{ (st.177)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow MC + M'C = MM'.$$

Dit kan echter alleen als C op MM′ ligt, dus als C op de centraal ligt.

Als de cirkels elkaar *inwendig* raken (fig. 184b), dan geldt voor punt C:

MC = r en M′C = r′, dus

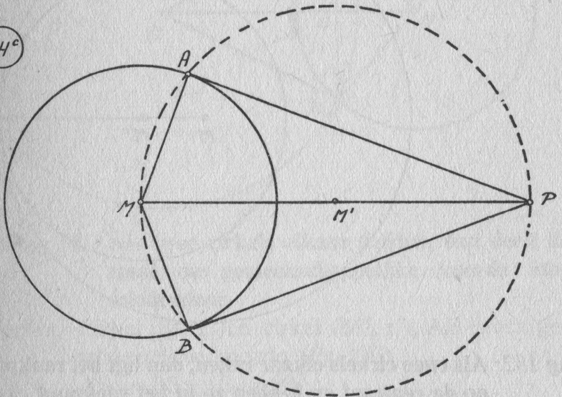
$$\left.\begin{array}{l} |MC - M'C| = |r - r'| \\ MM' = |r - r'| \text{ (st.179)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow |MC - M'C| = MM'.$$

Dit kan echter alleen als M′ tussen M en C ligt, dus C op het verlengde van MM′, of als M tussen M′ en C ligt, dus C op het verlengde van M′M. In beide gevallen ligt het raakpunt C op het verlengde van de centraal.

2. De raaklijn in C aan cirkel (M, r) staat loodrecht op MC, dus loodrecht op de centraal. De raaklijn in C aan cirkel (M′, r′) staat loodrecht op M′C, dus loodrecht op de centraal. Beide raaklijnen staan in C loodrecht op de centraal en vallen dus samen volgens stelling 5.

184c



Stelling 183: **Als een punt P buiten een cirkel ligt, dan gaan door P twee verschillende raaklijnen aan de cirkel.**

Gegeven: Cirkel (M, r), P buiten cirkel (M, r). (fig. 184c)

Te bew.: Door P gaan twee raaklijnen aan cirkel (M, r).

Bewijs: We tekenen MP en de cirkel met het midden M′ van MP als middelpunt en M′P als straal. Nu ligt M binnen en P buiten cirkel (M, r). Zoals in het bewijs van stelling 173 is aangetoond, zijn er nu juist twee punten A en B, die op cirkel (M, r) liggen en ook op cirkel (M′, M′P).

Nu is $\angle MAP = \frac{1}{2}$ bg MBP $= 90°$ (st.73) →
→ PA raakt (M, r) in A
en $\angle MBP = \frac{1}{2}$ bg MAP $= 90°$ (st.73) →
→ PB raakt (M, r) in B.

Er zijn dus twee raaklijnen uit P aan cirkel (M, r).

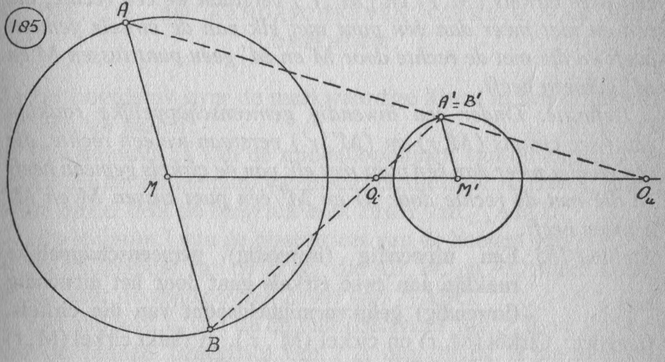
Stelling 184: **Als twee raaklijnen in A en B aan een cirkel (M, r) elkaar snijden in P, dan is PA = PB en ∠APM = ∠BPM.**

Bewijs: (fig. 184c)

$$\left.\begin{array}{l} MA = MB = r \\ \angle MAP = \angle MBP = 90° \\ MP = MP \end{array}\right\} \rightarrow \triangle MAP \cong \triangle MBP \rightarrow \text{ geval Z.Z.R.}$$

→ PA = PB.
→ ∠APM = ∠BPM.

Definitie: Als een punt P buiten een cirkel (M, r) ligt, dan is de hoek gevormd door de raaklijnen uit P aan de cirkel, de hoek, waaronder we uit P de cirkel zien.



In hoofdstuk VIII hebben we al gezien, dat twee figuren homothetisch zijn, als de ene door vermenigvuldiging rechtstreeks in de andere kan overgaan. Corresponderende lijnen zijn dan even-

wijdig. Als we twee cirkels hebben, is het altijd mogelijk om in de ene cirkel een straal te tekenen, die evenwijdig is met een gegeven straal in de andere cirkel, behalve als die gegeven straal op de centraal ligt. Maar van twee evenwijdige lijnstukken kunnen we gemakkelijk het bijbehorende centrum van vermenigvuldiging bepalen. Dat centrum is namelijk het snijpunt van de twee rechten, die door de corresponderende eindpunten van die twee lijnstukken gaan. Als we dat nu toepassen op twee evenwijdige stralen van twee cirkels, dan vinden we het centrum van vermenigvuldiging van beide cirkels. Daar die twee evenwijdige stralen gelijkgericht of tegengesteldgericht kunnen zijn, vinden we zelfs twee punten. Eén van deze punten ligt op het verlengde van de centraal en het andere ligt op de centraal zelf. (fig. 185)

Definitie: Onder het uitwendig gelijkvormigheidspunt van twee cirkels verstaan we het punt O_u, *dat centrum van vermenigvuldiging is, als de ene cirkel door vermenigvuldiging met een positief getal in de andere cirkel overgaat.*

Definitie: Onder het inwendig gelijkvormigheidspunt van twee cirkels verstaan we het punt O_i, *dat het centrum van vermenigvuldiging is, als de ene cirkel door vermenigvuldiging met een negatief getal in de andere cirkel overgaat.*

Deze definities gelden niet alleen voor twee cirkels, maar voor ieder tweetal homothetische figuren.

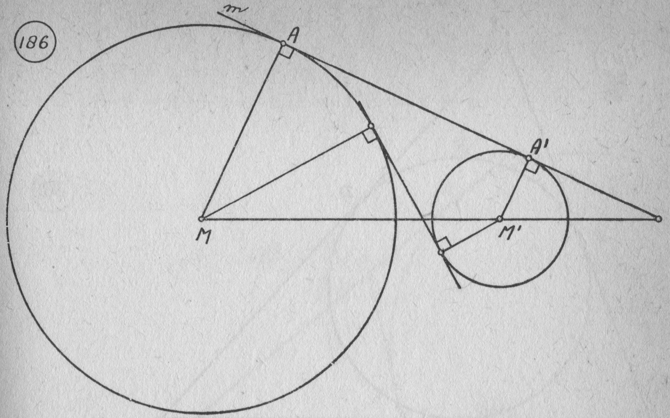
Definitie: Onder een uitwendig gemeenschappelijke raaklijn van twee cirkels (M, r) *en* (M', r') *verstaan we een rechte, die één en niet meer dan één punt met elk van de cirkels gemeen heeft en die met de rechte door* M *en* M' *geen punt tussen* M *en* M' *gemeen heeft.*

Definitie: Onder een inwendig gemeenschappelijke raaklijn van twee cirkels (M, r) *en* (M', r') *verstaan we een rechte, die één en niet meer dan één punt met elk van de cirkels gemeen heeft en die met de rechte door* M *en* M' *één punt tussen* M *en* M' *gemeen heeft.*

Stelling 185: **Een uitwendig (inwendig) gemeenschappelijke raaklijn aan twee cirkels gaat door het uitwendig (inwendig) gelijkvormigheidspunt van die cirkels.**

Gegeven: Cirkel (M, r) en cirkel (M', r'), m raakt cirkel (M, r) in A en cirkel (M', r') in A'. (fig. 186)

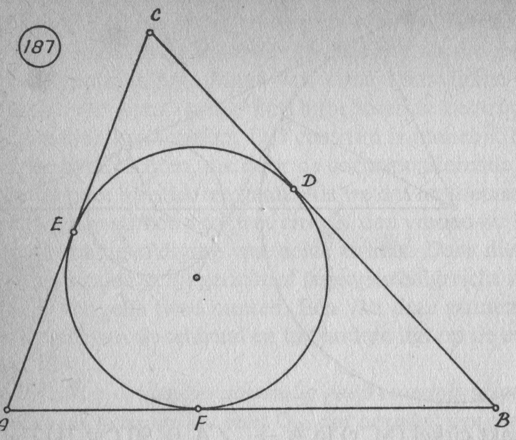
Te bew.: De rechte m gaat door O_u (uitwendig gelijkvormigheidspunt).



Bewijs: m raakt cirkel (M, r) in A → $\angle A = 90$ (°st.71)
m raakt cirkel (M′, r′) in A′ → $\angle A' = 90°$ (st.71) } →
→ $\angle A = \angle A'$ → MA // M′A′(st.7a).
Maar als de stralen MA en M′A′ evenwijdig en gelijkgericht zijn, dan zijn MA en M′A′ homothetische stralen en gaat de rechte m door het uitwendig gelijkvormigheidspunt O_u.

C. OM-, IN-, EN AANGESCHREVEN CIRKELS VAN EEN DRIEHOEK

In het hoofdstuk over de merkwaardige lijnen in een driehoek hebben we gezien:
1. Het snijpunt M van de middelloodlijnen van de zijden van △ABC is het middelpunt van de cirkel, die door A, B en C gaat. Deze cirkel heet de *omgeschreven cirkel* van △ABC.
2. Het snijpunt I van de bissectrices van de hoeken van △ABC is het middelpunt van de cirkel, die AB, BC en AC raakt. Deze cirkel heet de *ingeschreven cirkel* van △ABC.
3. Het snijpunt I_a van de buitenbissectrices van ∠B en ∠C en van de 'binnen' bissectrice van ∠A van △ABC is het middelpunt van de cirkel, die BC en de verlengden van AB en AC raakt. Deze cirkel heet de *aangeschreven cirkel aan de zijde BC.* Zo is er ook de aangeschreven cirkel aan de zijde AB en de aangeschreven cirkel aan de zijde AC.



Stelling 186: **Als de ingeschreven cirkel (I, r) van $\triangle$ABC de zijden BC, AC en AB raakt in D, E en F, dan is AD = AE = s − a, BD = BF = s − b en CD = CE = s − c.**

Gegeven: $\triangle$ABC, cirkel (I, r) raakt de zijden van $\triangle$ABC in D, E en F. (fig. 187)

Te bew.: AD = AE = s − a, BD = BF = s − b en CD = CE = s − c.

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} AF = AE = p \text{ (st.184)} \\ BD = BF = q \text{ (st.184)} \\ CD = CE = r \text{ (st.184)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \rightarrow AF + BF + BD + CD + CE + AE = \\ = 2p + 2q + 2r \\ AF + BF + BD + CD + CE + AE = \\ = 2s \text{ geg.} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2s = 2p + 2q + 2r \rightarrow s = p + q + r.$$

$$\left.\begin{array}{l} s = p + q + r \text{ (z.b.)} \\ BC = a = q + r \text{ (fig.)} \end{array}\right\} \rightarrow s = p + a \rightarrow$$

$$\rightarrow p = s - a \rightarrow AD = AE = s - a.$$

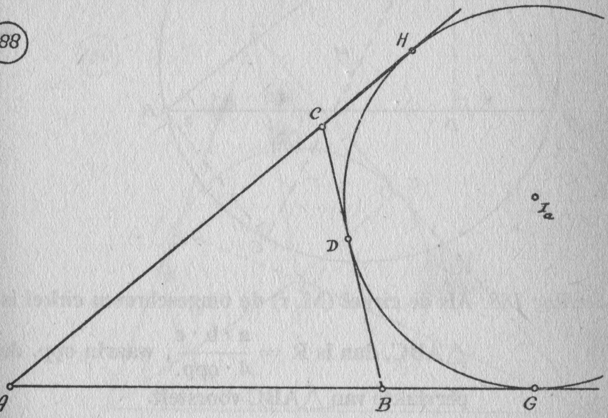
$$\left.\begin{array}{l} s = p + q + r \text{ (z.b.)} \\ AC = b = p + r \text{ (fig.)} \end{array}\right\} \rightarrow s = b + q \rightarrow$$

$$\rightarrow q = s - b \rightarrow BF = BD = s - b.$$

$$\left.\begin{array}{l} s = p + q + r \text{ (z.b.)} \\ AB = c = p + q \text{ (fig.)} \end{array}\right\} \rightarrow s = c + r \rightarrow$$

$\rightarrow r = s - c \rightarrow CD = CE = s - c.$

(188)



Stelling 187: **Als de aangeschreven cirkel aan de zijde BC van △ABC BC raakt in D en de verlengden van AB en AC in G en H, dan is AG = AH = s, BD = s − c, en CD = s − b.**

Gegeven: △ABC, cirkel (I_a, r_a) raakt BC in D en de verlengden van AB en AC in G en H. (fig. 188)

Te bew.: AG = AH = s, BD = s − c, CD = s − b.

Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} AB + AC + BD + CD = 2s \\ BD = BG \text{ (st.184)} \\ CD = CH \text{ (st.184)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

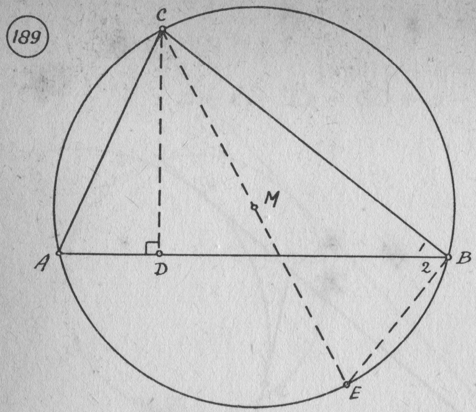
$\rightarrow AB + BG + AC + CH = 2s \rightarrow AG + AH = 2s$

$$\left.\begin{array}{l} AG + AH = 2s \\ AG = AH \text{ (st.184)} \end{array}\right\} \rightarrow AG = AH = s.$$

$BD = BG = AG - AB = s - c.$

$CD = CH = AH - AC = s - b.$

Een soortgelijke betrekking bestaat er voor de stukken op de andere twee zijden. Als F en E de raakpunten zijn van de twee andere aangeschreven cirkels, dan is AF = s − b, BF = s − a, AE = s − c en CE = s − a.



Stelling 188: **Als de cirkel (M, r) de omgeschreven cirkel is van $\triangle ABC$, dan is $R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot \text{opp.}}$, waarin opp. de oppervlakte van $\triangle ABC$ voorstelt.**

Gegeven: $\triangle ABC$, cirkel (M, R) is de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. (fig. 189)

Te bew.: $R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot \text{opp.}}$.

Bewijs: Trek hoogtelijn CD en middellijn CE.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle A = \tfrac{1}{2} \text{ bg } BC \text{ (st.73)} \\ \angle E = \tfrac{1}{2} \text{ bg } BC \text{ (st.73)} \end{array}\right\} \rightarrow \angle A = \angle E \\ \left.\begin{array}{l} \angle B_{1,2} = \tfrac{1}{2} \text{ bg } CAE = 90^\circ \\ \angle D \quad = 90^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \angle B_{1,2} = \angle D \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow \triangle ADC \sim \triangle EBC$
geval h.h.

Hieruit volgt: $AC : EC = DC : BC \rightarrow b : 2R = h_c : a$

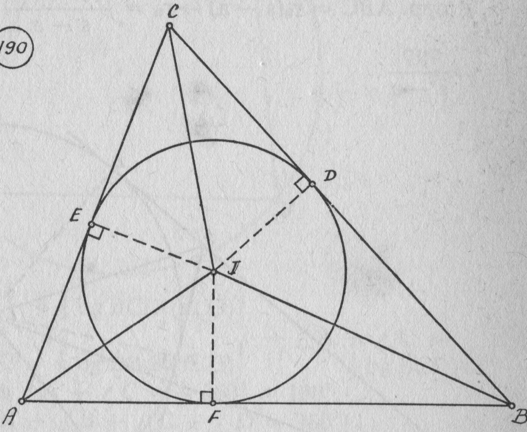
$H \cdot E \rightarrow 2R \cdot h_c = a \cdot b \rightarrow R = \dfrac{a \cdot b}{2h_c} \rightarrow$

$\rightarrow R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot \frac{1}{2} c \cdot h_c} \rightarrow R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot \text{opp.}}$.

Opmerking: We hebben nu een viertal formules voor de straal van de omgeschreven cirkel, namelijk

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot \text{opp.}} = \frac{a \cdot b}{2h_c} = \frac{b \cdot c}{2h_a} = \frac{a \cdot c}{2h_b}.$$

190



Stelling 189: **Als cirkel (I, r) de ingeschreven cirkel is van △ABC, dan is r = opp./s, waarin opp. de oppervlakte van △ABC is.**

Gegeven: △ABC, cirkel (I, r) is de ingeschreven cirkel van △ABC. (fig. 190)

Te bew.: r = opp./s.

Bewijs: We verbinden I met A, B en C. Dan is:

opp. ABC = opp. ABI + opp. BCI + opp. ACI

opp. ABC = $\frac{1}{2}$ AB·IF + $\frac{1}{2}$ BC·ID + $\frac{1}{2}$ AC·IE

opp. ABC = $\frac{1}{2}$ c·r + $\frac{1}{2}$ a·r + $\frac{1}{2}$ b·r =

$\frac{1}{2}$ r (a + b + c) = $\frac{1}{2}$ r·2s

opp. ABC = r·s → r = opp. ABC/s = opp./s.

Stelling 190: **Als cirkel (I_a, r_a) de aangeschreven cirkel is aan de zijde BC van △ABC, dan is $r_a = \frac{\text{opp.}}{s - a}$**

Gegeven: △ABC, cirkel (I_a, r_a) is de aangeschreven cirkel aan de zijde BC. (fig. 191)

Te bew.: $r_a = \frac{\text{opp.}}{s - a}$.

Bewijs: We verbinden I_a met A, B en C. Dan is:

$$\text{opp. } ABC = \text{opp. } ABI_a + \text{opp. } ACI_a - \text{opp. } BCI_a$$

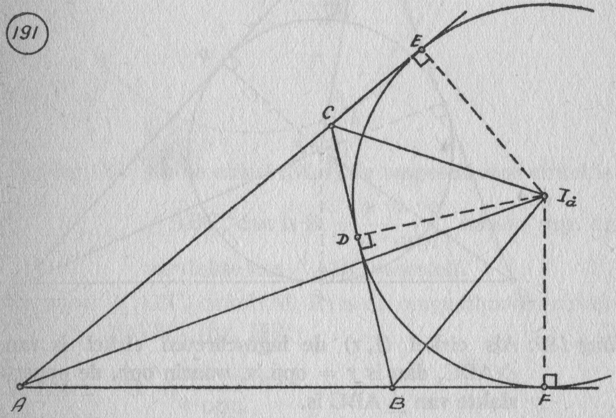
$$\text{opp. } ABC = \tfrac{1}{2}\,AB \cdot I_aF + \tfrac{1}{2}\,AC \cdot I_aE - \tfrac{1}{2}\,BC \cdot I_aD$$

$$\text{opp. } ABC = \tfrac{1}{2}\,c \cdot r_a + \tfrac{1}{2}\,b \cdot r_a - \tfrac{1}{2}\,a \cdot r_a =$$

$$\tfrac{1}{2}\,r_a(c + b - a) = \tfrac{1}{2}\,r_a(2s - 2a)$$

$$\text{opp. } ABC = r_a(s - a) \rightarrow r_a = \frac{\text{opp. } ABC}{s - a} =$$

$$\frac{\text{opp.}}{s - a}.$$



Opmerking: Op dezelfde manier kunnen we vinden:

$$r_b = \frac{\text{opp.}}{s - b} \quad \text{en} \quad r_c = \frac{\text{opp.}}{s - c}.$$

D. KOORDEN- EN RAAKLIJNENVIERHOEK

Definitie: Een vierhoek is een koordenvierhoek, als door de vier hoekpunten een cirkel kan gaan.

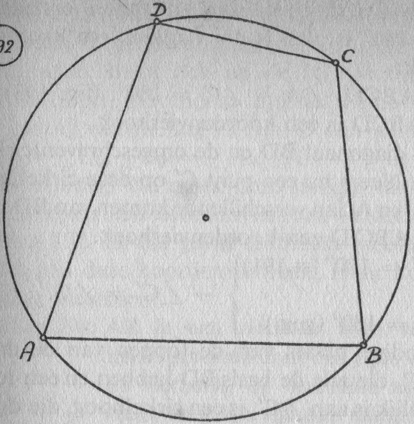
Definitie: Een vierhoek is een raaklijnenvierhoek, als de vier zijden raken aan dezelfde cirkel.

Stelling 191: **Als een vierhoek een koordenvierhoek is, dan is de som van elk paar overstaande hoeken 180°.**

Gegeven: ABCD is een koordenvierhoek. (fig. 192)

Te bew.: $\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$.

192

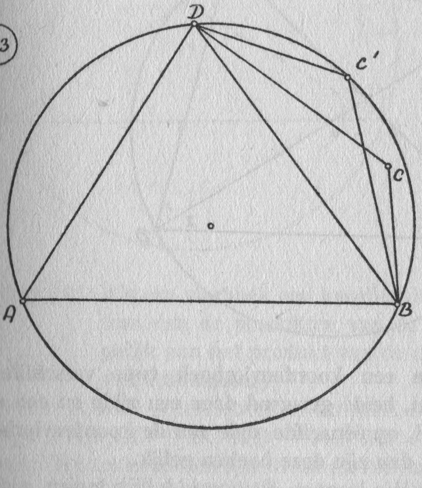


Bewijs: $\angle A = \frac{1}{2}$ bg BCD (st.73) and $\angle C = \frac{1}{2}$ bg DAB (st.73) $\rightarrow \angle A + \angle C = \frac{1}{2}$ bg BCDAB,

dus $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ and $\angle A + \angle C = 180°$ $\rightarrow \angle B + \angle D = 180°$.

193



Stelling 192: **Als in een vierhoek de som van twee overstaande hoeken 180° is, dan is die vierhoek een koordenvierhoek.**

Gegeven: Vierhoek ABCD, $\angle A + \angle C = 180°$. (fig. 193)

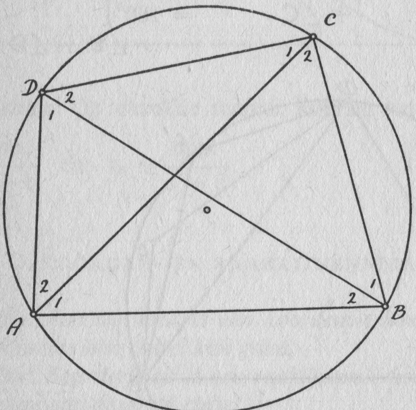
Te bew.: Vierhoek ABCD is een koordenvierhoek.

Bewijs: We tekenen diagonaal BD en de omgeschreven cirkel van $\triangle ABD$. Neem nu een punt C′ op deze cirkel, zódanig, dat C′ en A aan verschillende kanten van BD liggen. Dan is ABC′D een koordenvierhoek.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle C' = 180° \text{ (st.191)} \\ \\ \angle A + \angle C = 180° \text{ (geg.)}\end{array}\right\} \rightarrow \angle C' = \angle C.$$

De meetkundige plaats van de toppen van de driehoeken DBC, die alle de basis BD hebben en een tophoek, die gelijk is aan $\angle C'$, is een cirkelboog, die door B en D gaat (st. 115). Deze boog gaat ook door C′. Dus punt C ligt op de cirkelboog, die door B, D en C′ gaat en dat is juist een boog van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABD$. Hieruit volgt, dat A, B, C en D op éénzelfde cirkel liggen en dat ABCD een koordenvierhoek is.

(194)



Stelling 193: **Als in een koordenvierhoek twee verschillende hoeken, beide gevormd door een zijde en een diagonaal, op éénzelfde zijde van de koordenvierhoek staan, dan zijn deze hoeken gelijk.**

Bewijs: (fig. 194) We kunnen dit onmiddellijk inzien, als we

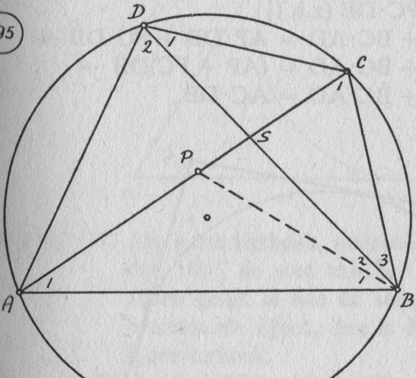
de omgeschreven cirkel van de koordenvierhoek tekenen. Twee van dergelijke hoeken staan dan niet alleen op dezelfde zijde, maar staan ook op de bij die zijde behorende boog van de cirkel. Bovendien zijn het beide omtrekshoeken, en als gevolg van stelling 73 zijn ze dan gelijk. We hebben dus: $\angle A_1 = \angle D_2$, $\angle B_1 = \angle A_2$, $\angle C_1 = \angle B_2$ en $\angle D_1 = \angle C_2$.

Opmerking: We zullen deze stelling vaak toepassen, als we in een figuur een koordenvierhoek ontdekken met behulp van stelling 192. In dat geval ontbreekt meestal de omgeschreven cirkel van deze koordenvierhoek, maar kunnen we toch deze stelling toepassen.

Stelling 194: **Als in een vierhoek twee verschillende hoeken, beide gevormd door een zijde en een diagonaal van de vierhoek, op éénzelfde zijde van de vierhoek staan en gelijk zijn aan elkaar, dan is die vierhoek een koordenvierhoek.**

Bewijs: Dit volgt onmiddellijk uit stelling 115.

195



Stelling 195: **Als een vierhoek een koordenvierhoek is, dan is de som van de produkten van de overstaande zijden gelijk aan het produkt van de diagonalen. (stelling van Ptolemaeus)**

Gegeven: ABCD is een koordenvierhoek. (fig. 195)

Te bew.: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

Bewijs: We tekenen een lijn BP (P op AC) zódanig, dat $\angle ABP = \angle DBC$. Er zijn twee mogelijkheden: P komt

tussen A en S of P komt tussen S en C. Voor het bewijs maakt dit geen principieel verschil. We nemen hier het eerste geval, namelijk dat P tussen A en S komt.

$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle D_1 \text{ (st.193)} \\ \angle B_1 = \angle B_3 \text{ (z.b.)}\end{array}\right\} \rightarrow \triangle ABP \sim \triangle DBC \rightarrow$ geval h.h.

$\rightarrow AP : AB = DC : DB$

H.E $\rightarrow AB \cdot DC = AP \cdot DB$.

$\left.\begin{array}{l}\angle B_1 = \angle B_3 \text{ (z.b.)} \\ \angle B_2 = \angle B_2\end{array}\right\} \rightarrow \angle B_{1,2} = \angle B_{2,3}$

$\left.\begin{array}{l}\angle B_{1,2} = \angle B_{2,3} \text{ (z.b.)} \\ \angle D_2 = \angle C_1 \text{ (st.193)}\end{array}\right\} \rightarrow \triangle PBC \sim \triangle ABD \rightarrow$ geval h.h.

$\rightarrow PC : BC = AD : DB$

H.E $\rightarrow BC \cdot AD = PC \cdot DB$,

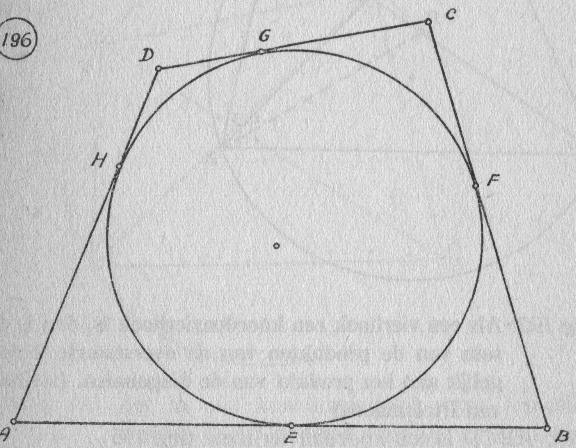
$\left.\begin{array}{l}AB \cdot DC = AP \cdot DB \text{ (z.b.)} \\ BC \cdot AD = PC \cdot DB \text{ (z.b.)}\end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow AB \cdot DC + BC \cdot AD = AP \cdot DB + PC \cdot DB \rightarrow$

$\rightarrow AB \cdot DC + BC \cdot AD = (AP + PC)DB \rightarrow$

$\rightarrow AB \cdot DC + BC \cdot AD = AC \cdot DB$.

196



Stelling 196: **Als een vierhoek een raaklijnenvierhoek is, dan is de som van het ene paar overstaande zijden gelijk**

aan de som van het andere paar overstaande zijden.

Gegeven: ABCD is een raaklijnenvierhoek. (fig. 196)

Te bew.: AB + CD = AD + BC.

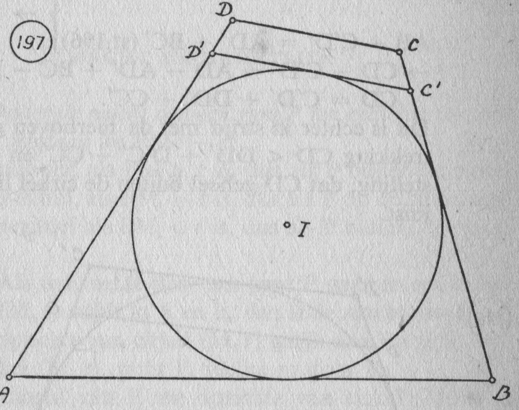
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} AE = AH = a \text{ (st.184)} \\ BE = BF = b \text{ (st.184)} \\ CG = CF = c \text{ (st.184)} \\ DG = DH = d \text{ (st.184)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow$ AE + BE + CG + DG = AH + DH + BF + CF, of

AB + CD = AD + BC.

197



Stelling 197: **Als in een vierhoek, waarvan de hoeken kleiner zijn dan 180°, de som van het ene paar overstaande zijden gelijk is aan de som van het andere paar overstaande zijden, dan is die vierhoek een raaklijnenvierhoek.**

Gegeven: Vierhoek ABCD, AB + CD = AD + BC. (fig. 197 en 198)

Te bew.: ABCD is een raaklijnenvierhoek.

Bewijs: De bissectrices van ∠A en ∠D snijden elkaar in ieder geval, omdat de hoeken kleiner zijn dan 180°. Het snijpunt I ligt aan dezelfde kant van AB als de punten C en D. De loodlijnen uit I op de zijden AB, BC en AD neergelaten, zijn even groot volgens stelling 103. Nu zijn er drie mogelijkheden: 1. CD ligt geheel buiten deze cirkel. 2. CD snijdt deze cirkel in twee punten. 3. CD raakt aan deze cirkel.

1. Als CD buiten de cirkel ligt, dan is er een rechte C'D', die evenwijdig is met CD en aan de cirkel raakt. (C' op BC en D' op AD.) (fig. 197)
Trek nu D'C. Dan is:

$$\left.\begin{array}{l} DC < DD' + D'C \text{ (st.19)} \\ D'C < D'C' + CC' \text{ (st.19)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

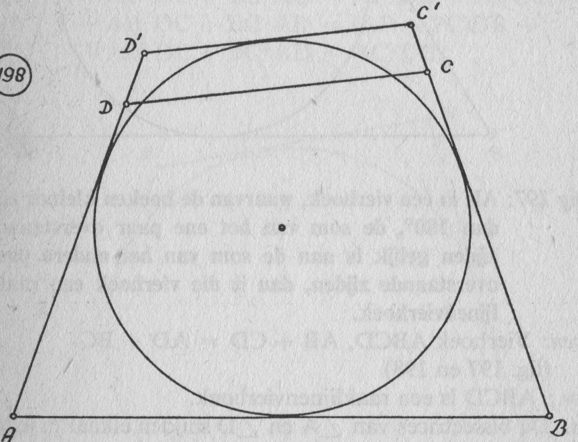
$$\rightarrow DC + D'C < DD' + D'C + D'C' + CC' \text{ of}$$
$$DC < DD' + D'C' + CC'$$

$$\left.\begin{array}{l} AB + CD = AD + BC \text{ (geg.)} \\ AB + C'D' = AD' + BC' \text{ (st.196)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow CD - C'D' = AD - AD' + BC - BC', \text{ of}$$
$$CD = C'D' + DD' + CC'.$$

Dit is echter in strijd met de hierboven gevonden betrekking CD < DD' + D'C' + CC' en de veronderstelling, dat CD geheel buiten de cirkel ligt, is dus niet juist.

198



2. Als CD de cirkel in twee punten snijdt, dan is er een rechte C'D', (C' op het verlengde van BC, D' op het verlengde van AD), die evenwijdig is met CD en aan de cirkel raakt. (fig. 198)
Zoals reeds bij punt 1 bewezen is, is ook hier D'C' < DD' + DC + CC'.

$$\left.\begin{array}{l} AB + D'C' = AD' + BC' \text{ (st.196)} \\ AB + DC = AD + BC \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow D'C' - DC = AD' - AD + BC' - BC$, of

$D'C' = DD' + DC + CC'$.

Maar dit is in strijd met de betrekking $D'C' < DD' + DC + CC'$ (z.b.), dus CD snijdt de cirkel niet.

3. Nu blijft alleen de derde mogelijkheid over, namelijk dat CD de cirkel raakt. Maar de andere drie zijden raken eveneens aan deze cirkel, dus ABCD is een raaklijnenvierhoek.

E. MACHT EN MACHTLIJN

Definitie: Onder de macht van een punt P ten opzichte van een cirkel (M, r) verstaan we $PM^2 - r^2$.

De macht is positief, als $PM > r$ is, dus als P buiten de cirkel ligt. De macht is nul, als $PM = r$ is, dus als P op de cirkel ligt. De macht is negatief als $PM < r$ is, dus als P binnen de cirkel ligt.

Stelling 198: **Als een rechte door een punt P gaat en een cirkel (M, r) snijdt in A en B, dan is de macht van P ten opzichte van cirkel (M, r) gelijk aan PA·PB.**

Gegeven: Cirkel (M, r), punt P, rechte m door P.

Te bew.: De macht van P ten opzichte van cirkel (M, r) is PA·PB.

Bewijs: We onderscheiden twee gevallen: 1. P buiten cirkel (M, r). 2. P binnen cirkel (M, r).

Geval 1: P buiten cirkel (M, r). (fig. 199)

We trekken de raaklijn uit P, die cirkel (M, r) raakt in C en tekenen straal MC.

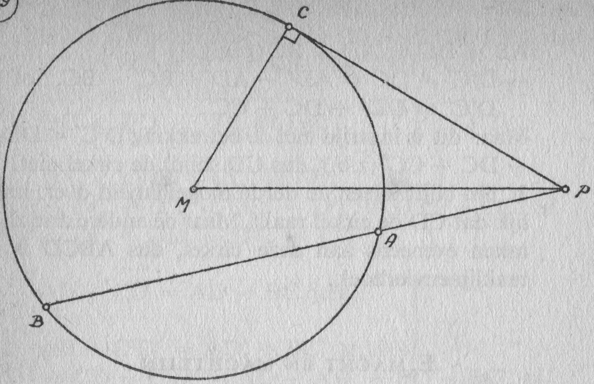
$\angle C = 90°$ (st.71) $\rightarrow MC^2 + PC^2 = MP^2$ (st.117)$\rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow PC^2 = MP^2 - MC^2 \\ \text{De macht m van P t.o.v. cirkel (M, r) is } m = MP^2 - r^2 \\ MC = r \end{array}\right\} \rightarrow$$

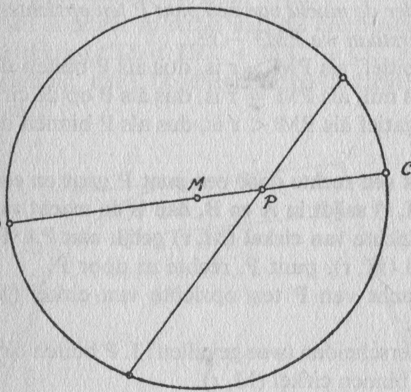
$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow m = PC^2 \\ PA \cdot PB = PC^2 \text{ (st.169)} \end{array}\right\} \rightarrow m = PA \cdot PB.$$

Dus de macht m van P ten opzichte van cirkel (M, r) is PA·PB.

199



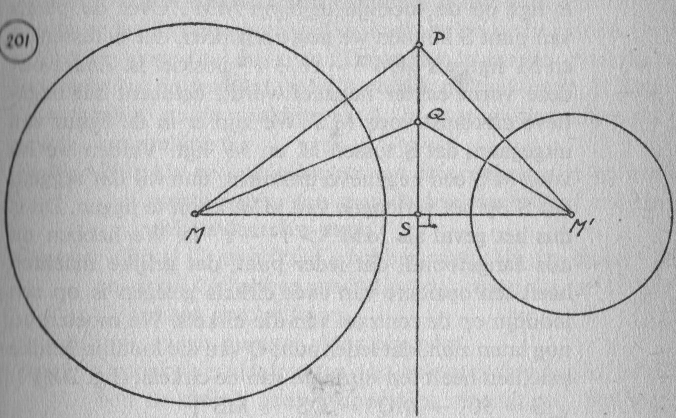
200



Geval 2: P binnen de cirkel (M, r). (fig. 200)
We trekken de middellijn door P, die de cirkel in C en D snijdt en nemen de richting van C naar D als positief aan.
$m = PM^2 - r^2 = (PM + r)(PM - r)$, waarin PM en r positieve lijnstukken voorstellen. Nu is $r = MD$ en ook $r = CM$, want zowel MD als CM zijn positief. Dus $m = (PM + r) \times (PM - r)$(z.b.) $\rightarrow m = (PM + MD)(PM - CM) =$
$- (PM + MD)(CM - PM) = -PD \cdot CP = PD \cdot PC$.
Maar $PD \cdot PC = PA \cdot PB$ (st.168). Dus $m = PA \cdot PB$. De macht van P ten opzichte van cirkel (M, r) is $PA \cdot PB$, waarbij PA en PB gerichte lijnstukken zijn. In het eerste deel van het bewijs van stelling 198 is al bewezen wat we nu in een stelling formuleren.

Stelling 199: **Als een punt P buiten een cirkel ligt en een raaklijn door P raakt de cirkel in C, dan is de macht van P ten opzichte van de cirkel gelijk aan PC^2. (fig. 199)**

(201)



Stelling 200: **De meetkundige plaats van de punten, die gelijke machten hebben ten opzichte van twee niet concentrische cirkels is een rechte, die loodrecht op de centraal staat.**

Gegeven: Cirkel (M, r) en cirkel (M′, r′). (fig. 201)

Te bew.: De meetkundige plaats van de punten, die gelijke machten hebben ten opzichte van beide cirkels is een loodlijn op de centraal.

Bewijs: Stel dat P een punt van de meetkundige plaats is. De loodlijn uit P op MM′ snijdt MM′ in S. We mogen aannemen, dat $r > r'$ is. De macht van P ten opzichte van cirkel (M, r) is $PM^2 - r^2$. De macht van P ten opzichte van cirkel (M′, r′) is $PM'^2 - r'^2$. Deze machten zijn gelijk, dus

$PM^2 - r^2 = PM'^2 - r'^2$.

In $\triangle PMM'$ is $PM^2 = PM'^2 + MM'^2 - 2MM' \cdot M'S$ (st.125) $\rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow PM^2 - PM'^2 = MM'^2 - 2MM' \cdot M'S \\ PM^2 - r^2 = PM'^2 - r'^2 \text{ (z.b.)} \rightarrow \\ \qquad \rightarrow PM^2 - PM'^2 = r^2 - r'^2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow MM'^2 - 2MM' \cdot M'S = r^2 - r'^2 \rightarrow$

$\rightarrow 2MM' \cdot M'S = MM'^2 - r^2 + r'^2$ dus

$M'S = (MM'^2 - r^2 + r'^2)/2MM'$.

Nu zijn r, r′ en MM′ vaste lijnstukken onafhankelijk van de ligging van P. Dus M′S is een lijnstuk met constante lengte onafhankelijk van de ligging van P. Dus P ligt op de loodlijn in S op MM′. Over de plaats van punt S kunnen we nog opmerken, dat S tussen M en M′ ligt, als $MM'^2 - r^2 + r'^2$ positief is. Zodra een deze vorm echter negatief wordt, betekent dat negatieve uitkomst voor M′S. We zijn er in de figuur van uitgegaan, dat S tussen M en M′ ligt. Vinden we nu voor M′S een negatieve uitkomst, dan wil dat zeggen, dat S op het verlengde van MM′ komt te liggen. Dit is dus het geval als $MM'^2 > r^2 - r'^2$ is. We hebben nu dus aangetoond, dat ieder punt, dat gelijke machten heeft ten opzichte van twee cirkels gelegen is op een loodlijn op de centraal van die cirkels. We moeten nu nog laten zien, dat ieder punt Q van die loodlijn gelijke machten heeft ten opzichte van de cirkels. (fig. 201)

$$\left.\begin{array}{l}\angle S = 90^\circ \rightarrow MQ^2 = QS^2 + MS^2 \\ \\ M'Q^2 = QS^2 + M'S^2\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow MQ^2 - M'Q^2 = MS^2 - M'S^2 =$$
$$= (MS + M'S)(MS - M'S) \rightarrow$$
$$\rightarrow MQ^2 - M'Q^2 = MM'(MS - M'S) =$$
$$= MM'(MM' - M'S - M'S) =$$
$$= MM'(MM' - 2M'S) \rightarrow$$
$$\rightarrow MQ^2 - M'Q^2 = MM'^2 - 2MM' \cdot M'S, \text{ maar}$$
$$M'S = (MM'^2 - r^2 + r'^2)/2MM', \text{ dus}$$
$$\rightarrow MQ^2 - M'Q^2 = MM'^2 - (MM'^2 - r^2 +$$
$$+ r'^2) = r^2 - r'^2 \rightarrow$$

$\rightarrow MQ^2 - r^2 = M'Q^2 - r'^2$. Hier staan echter in het eerste en tweede lid juist de machten van Q ten opzichte van de cirkel (M, r) en M′, r′) en deze machten zijn dus gelijk.

Definitie: De meetkundige plaats van de punten, die gelijke machten hebben ten opzichte van twee niet-concentrische cirkels heet de machtlijn van die cirkels.

Stelling 201: **Als twee cirkels elkaar snijden, dan gaat de machtlijn van die cirkels door hun snijpunten.**

Bewijs: Als A en B de snijpunten zijn van die cirkel, dan is de macht van A ten opzichte van de ene cirkel gelijk aan nul en t.o.v. de andere cirkel ook. Dus de machtlijn gaat door A, omdat A

gelijke machten heeft t.o.v. die cirkels. Precies hetzelfde geldt ook voor het punt B.

Stelling 202: **Als twee cirkels elkaar raken, dan valt de machtlijn samen met de raaklijn in het raakpunt.**

Bewijs: Als A het raakpunt is, dan is A een punt van beide cirkels en heeft A dus weer gelijke machten t.o.v. die cirkels. De machtlijn gaat dus door A. Bovendien staat de machtlijn loodrecht op de centraal (st.200) evenals de raaklijn in A. Dus de machtlijn en de raaklijn in A moeten samenvallen als gevolg van stelling 5.

Stelling 203: **Als de middelpunten van drie cirkels niet op een rechte liggen, dan gaan de drie machtlijnen van die cirkels door één punt.**

Gegeven: Cirkel C_1 en cirkel C_2 hebben machtlijn m_1, cirkel C_1 en cirkel C_3 hebben machtlijn m_2, cirkel C_2 en cirkel C_3 hebben machtlijn m_3.

Te bew.: m_1, m_2 en m_3 gaan door één punt.

Bewijs: Omdat de middelpunten niet op een rechte liggen, hebben de cirkels geen evenwijdige machtlijnen. Stel het snijpunt van m_1 en m_2 is S.

S ligt op m_1 → S heeft gelijke machten t.o.v. C_1 en C_2
S ligt op m_2 → S heeft gelijke machten t.o.v. C_1 en C_3 } →

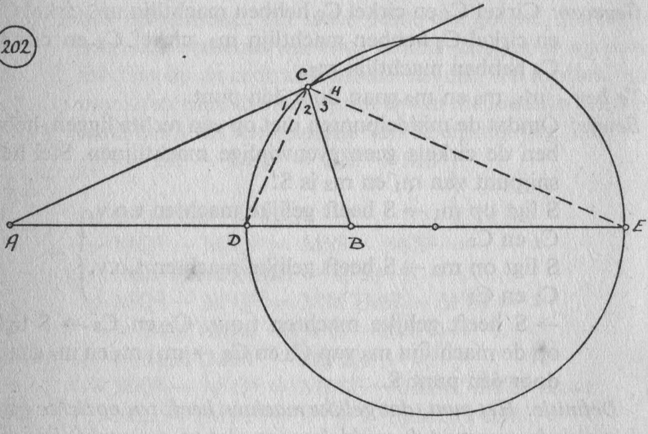
→ S heeft gelijke machten t.o.v. C_2 en C_3 → S ligt op de machtlijn m_3 van C_2 en C_3 → m_1, m_2 en m_3 gaan door één punt S.

Definitie: Het punt, dat gelijke machten heeft ten opzichte van drie cirkels, waarvan de middelpunten niet op een rechte liggen, heet het machtpunt van die drie cirkels.

Stelling 204: **De meetkundige plaats van de toppen van de driehoeken, die dezelfde oppervlakte hebben als een gegeven driehoek ABC en die met deze driehoek de basis AB gemeenschappelijk hebben, bestaat uit de rechte m door C evenwijdig aan AB en de rechte m′ die het spiegelbeeld is van m bij spiegeling in de rechte door A en B.**

Bewijs: Het bewijs berust op stelling 162 en wordt aan de lezer overgelaten.

202



Stelling 205: **De meetkundige plaats van de toppen van de driehoeken ABC met een gegeven basis AB waarvan de opstaande zijden AC en BC zich verhouden als twee gegeven lijnstukken m en n, is een cirkel.**

Bewijs: (fig. 202) Stel C is een punt zodanig, dat CA : CB = m : n. De bissectrice van $\angle C$ snijdt AB in D.

$$\left.\begin{array}{l}\angle C_1 = \angle C_2 \rightarrow CA:CB = AD:BD \text{ (st.137)}\\ CA:CB = m:n \text{ (z.b.)}\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow AD:BD = m:n.$$

Nu is er juist één punt D tussen A en B, waarvoor AD : BD = m : n is. D is dus een vast punt tussen A en B. De buitenbissectrice van $\angle C$ snijdt AB in E.

$$\angle C_3 = \angle C_4 \rightarrow CA:CB = EA:EB \text{ (st.138)} \\ CA:CB = m:n \text{ (z.b.)} \Big\} \rightarrow$$

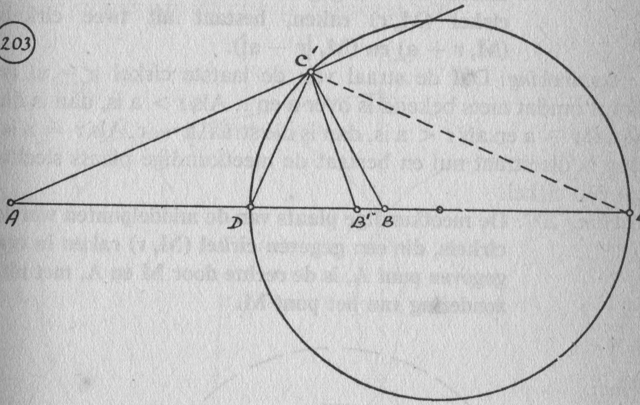
$$\rightarrow EA:EB = m:n.$$

Nu is er ook juist één punt E, dat AB uitwendig verdeelt in de verhouding m : n en ook E is dus een vast punt.

$$\left.\begin{array}{l} \angle C_{1,2} + \angle C_{3,4} = 180° \\ \angle C_1 = \angle C_2 \\ \angle C_3 = \angle C_4 \end{array}\right\} \rightarrow \angle C_2 + \angle C_3 = 90°, \text{ d.w.z. } \angle DCE = 90°.$$

Als D en E vaste punten zijn en $\angle DCE$ is een rechte hoek, dan ligt punt C op de cirkel met DE als middellijn.

203



Omgekeerd kunnen we bewijzen, dat voor ieder punt C' van de cirkel geldt, dat C'A : C'B = m : n. (fig. 203)

Er is dan gegeven, dat de cirkel DE als middellijn heeft, waarbij D en E AB inwendig en uitwendig verdelen in de verhouding m : n. We nemen een punt B' op DE zodanig, dat $\angle AC'D = \angle DC'B'$. Dus AD : B'D = AC' : B'C'. Omdat C'E $\perp$ C'D staat, is C'E buitenbissectrice van $\triangle AB'C'$, dus AE : B'E = AC' : B'C'. Uit de beide evenredigheden volgt:

$$\left.\begin{array}{l} AD:B'D = AE:B'E \\ \text{Gegeven is:} \\ AD:BD = AE:BE \end{array}\right\} \rightarrow B'D:B'E = BD:BE.$$

Dit kan echter alleen als B' en B samenvallende punten zijn, dus als C'D bissectrice van $\angle AC'B$ is. Maar dan is:

$$\left.\begin{array}{l} AC' : BC' = AD : BD \\ m : n = AD : BD \text{ (geg.)} \end{array}\right\} \rightarrow AC' : BC = m : n.$$

Opmerking: We noemen deze cirkel de *cirkel van Apollonius* voor de zijde AB van △ABC. Zo zijn er ook nog de cirkels van Apollonius voor de zijden BC en AC.

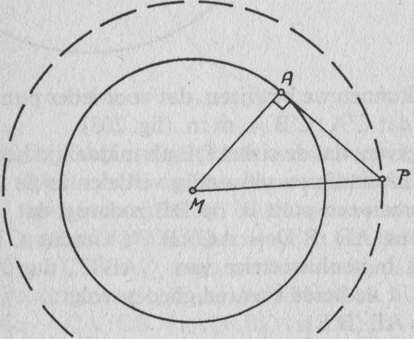
Nu we in het vorige hoofdstuk gedefinieerd hebben, wat we verstaan onder twee cirkels, die elkaar raken, volgen hier nog enkele meetkundige plaatsen, die aansluiten bij de stellingen 108 t/m 114 en die we niet zullen bewijzen.

Stelling 206: **De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels met een gegeven straal a, die een gegeven cirkel (M, r) raken, bestaat uit twee cirkels (M, r + a) en (M, |r − a|).**

Opmerking: Dat de straal van de laatste cirkel $|r - a|$ is, komt omdat niets bekend is over a en r. Als $r > a$ is, dan is die straal $r - a$ en als $r < a$ is, dan is die straal $a - r$. Als $r = a$ is, dan is die straal nul en bestaat de meetkundige plaats slechts uit één cirkel.

Stelling 207: **De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die een gegeven cirkel (M, r) raken in een gegeven punt A, is de rechte door M en A, met uitzondering van het punt M.**

204

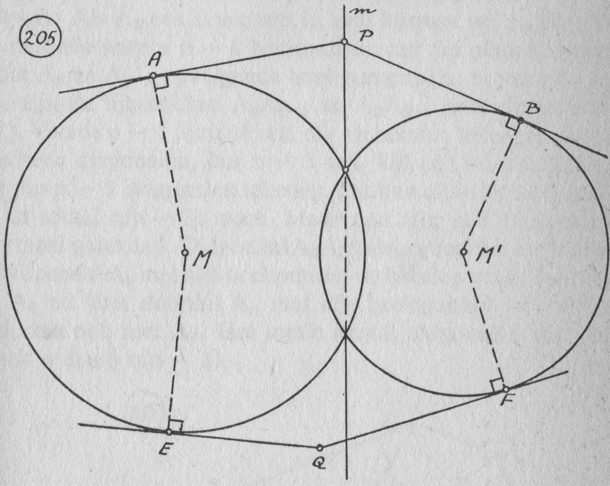


Stelling 208: **De meetkundige plaats van de punten, die een gegeven macht m^2 hebben ten opzichte van een gegeven cirkel (M, r), is een cirkel met M als middel-**

punt en $\sqrt{r^2 + m^2}$ als straal.

Bewijs: (fig. 204) m is een gegeven lijnstuk. Stel dat P een punt is met een macht m^2 t.o.v. cirkel (M, r). De raaklijn door P raakt de cirkel in A. De macht van P t.o.v. cirkel (M, r) is PA^2 (st.199), dus $m^2 = PA^2$. $\angle A = 90° \rightarrow MP^2 = MA^2 + PA^2 \rightarrow MP^2 = r^2 + m^2 \rightarrow MP = \sqrt{r^2 + m^2}$. Omdat r en m constante lijnstukken zijn, is MP ook constant. Maar dan ligt P dus steeds op de cirkel met M als middelpunt en $\sqrt{r^2 + m^2}$ als straal.

Definitie: Onder de hoek, die twee snijdende cirkels met elkaar maken, verstaan we de hoek van de raaklijnen, die in een snijpunt van de cirkels aan die cirkels getrokken zijn.



Stelling 209: **De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die twee gegeven cirkels (M, r) en (M′, r′) beide loodrecht snijden, is het buiten die cirkels gelegen gedeelte van de machtlijn van die twee cirkels.**

Bewijs: (fig. 205). De cirkel (M, r) en de cirkel (M′, r′) hebben rechte m als machtlijn. Als P een punt van de machtlijn is, en PA en PB raaklijnen aan de twee cirkels, dan is PA = PB (st.199), want de machten van P t.o.v. die cirkels zijn gelijk. Nu snijdt de cirkel (P, PA) de twee gegeven cirkels loodrecht, want de hoek van de cirkel (P, PA) en cirkel (M, r) is $\angle$MAP

volgens de definitie en die hoek is 90° volgens stelling 71. De hoek van cirkel (P, PA) en cirkel (M′, r′) is ∠M′PB, die ook 90° is.
Is Q het middelpunt van een cirkel, die de cirkels (M, r) en (M′, r′) loodrecht snijdt in de punten E en F, dan is ∠MEQ = 90°, dus EQ raakt (M, r) in E en ∠M′FQ = 90°, dus FQ raakt (M′,r′) in F. De macht van Q t.o.v. (M, r) is dus QE^2 en die t.o.v. (M′, r′) is QF^2. Omdat E en F op cirkel (Q, QE) liggen, is QE = QF, dus Q heeft gelijke machten t.o.v. beide cirkels en ligt dan op de machtlijn m van (M, r) en (M′, r′).

XIV. DE VEELHOEK

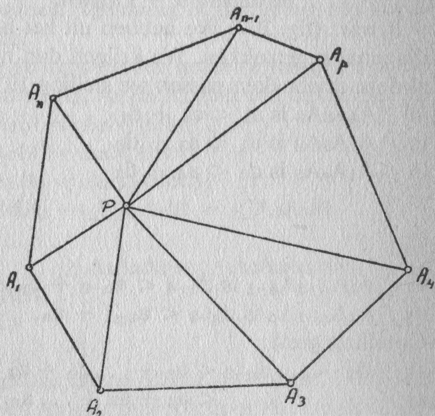
A. ALGEMEEN

Definitie: Als van n punten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ er geen drie op een rechte lijn liggen, dan vormen de lijnstukken $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ een n-hoek ($n \geqslant 3$.)
Deze n-hoek heet convex, als de lijnstukken $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ geen andere snijpunten hebben dan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en als al de hoeken van de n-hoek kleiner zijn dan 180°.

Definitie: Een diagonaal van een n-hoek is een lijnstuk, dat twee niet-opvolgende hoekpunten van die n-hoek verbindt.
Stelling 210: **Een n-hoek heeft $\frac{1}{2}$ n(n − 3) diagonalen.**

Bewijs: Als A_p een hoekpunt is, dan kunnen we A_p verbinden met alle andere n − 1 hoekpunten van die n-hoek. Maar omdat A_p en A_{p-1} opvolgende hoekpunten zijn, evenals A_p en A_{p+1} zijn de lijnstukken A_pA_{p-1} en A_pA_{p+1} geen diagonalen (def.). Van de n − 1 lijnstukken, die we konden tekenen, zijn er twee geen diagonalen, dus n − 3 wel. Uit één hoekpunt kan men dus n − 3 diagonalen tekenen. Dit kan uit ieder hoekpunt dus in totaal n(n − 3) maal. Maar dan zijn alle diagonalen twee maal getekend. Diagonaal A_pA_q bijvoorbeeld is eerst ontstaan doordat A_p met alle hoekpunten verbonden werd, dus ook met A_q en later doordat A_q met alle hoekpunten verbonden werd, dus ook met A_p. Het totale aantal diagonalen van een n-hoek is dus $\frac{1}{2}$ n(n − 3).

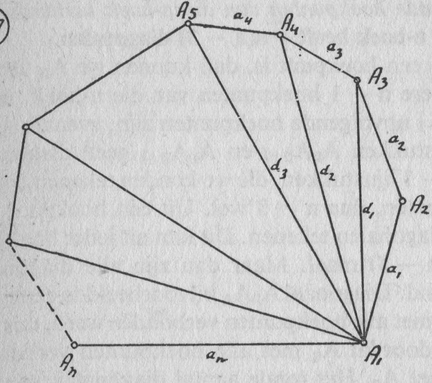
206



Stelling 211: **De hoeken van een n-hoek zijn samen $(n-2)\cdot 180°$.**

Bewijs: (fig. 206) We nemen binnen de n-hoek een willekeurig punt P en verbinden dat met de hoekpunten $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Er ontstaan zo n driehoeken $A_1A_2P, A_2A_3P, \ldots, A_nA_1P$. In ieder van deze driehoeken is de som van de hoeken 180°. De som van al de hoeken van deze n driehoeken is dus $n\cdot 180°$. Maar dat zijn juist alle hoeken van de n-hoek vermeerderd met alle hoeken bij P. Deze hoeken bij P zijn samen 360°. Dus $n\cdot 180° =$ som van de hoeken van de n-hoek $+ 360° \rightarrow$ de som van de hoeken van de n-hoek $= n\cdot 180° - 360° = n\cdot 180° - 2\cdot 180° = (n-2)\cdot 180°$.

207



Stelling 212: **Eén zijde van een n-hoek is kleiner dan de som van de andere $n - 1$ zijden.**

Bewijs: (fig. 207) We hebben uit het hoekpunt A_1 de $n - 3$ diagonalen getrokken. We krijgen dan $n - 2$ driehoeken. Op al deze driehoeken passen we stelling 19 toe, dus

in $\triangle A_1A_2A_3$ is $a_1 < a_2 + d_1$

in $\triangle A_1A_3A_4$ is $d_1 < a_3 + d_2$

in $\triangle A_1A_4A_5$ is $d_2 < a_4 + d_3$

.

.

.

in $\triangle A_1A_{n-2}A_{n-1}$ is $d_{n-4} < a_{n-2} + d_{n-3}$

in $\triangle A_1A_{n-1}A_n$ is $d_{n-3} < a_{n-1} + a_n$.

Optelling geeft:

$a_1 + d_1 + \ldots d_{n-3} < a_2 + \ldots a_n + d_1 + \ldots d_{n-3}$

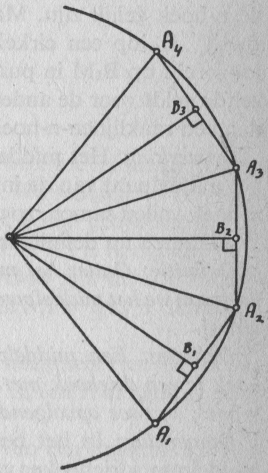
$a_1 \qquad < a_2 + a_3 + \ldots a_n$.

Definitie: Een n-hoek heet regelmatig, als alle zijden gelijk zijn en alle hoeken ook.

Definitie: Een koordenveelhoek is een veelhoek, waarvan de hoekpunten op eenzelfde cirkel liggen.

Definitie: Een raaklijnenveelhoek is een veelhoek, waarvan de zijden aan eenzelfde cirkel raken.

(208)



Stelling 213: **Als een n-hoek regelmatig is, dan is het een koorden-n-hoek.**

Bewijs: (fig. 208) In de figuur is een gedeelte van een n-hoek getekend. Door de punten A_1, A_2 en A_3 gaat een cirkel met M als middelpunt. Dus

$$\left.\begin{array}{r} A_1M = A_2M \text{ (z.b.)} \\ A_2M = A_3M \text{ (z.b.)} \\ A_1A_2 = A_2A_3 \text{ (def.)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \triangle A_2MA_3 \cong \triangle A_1MA_2 \rightarrow \angle A_1A_2M = \angle A_2A_3M \\ \quad \text{geval Z.Z.Z.} \\ \qquad\qquad \angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4 \text{ (def.)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \angle A_3A_2M = \angle A_4A_3M \\ \quad A_2A_3 = A_3A_4 \text{ (def.)} \\ \quad A_2M = A_3M \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow \triangle A_2MA_3 \cong \triangle A_3MA_4$ (geval Z.H.Z.) $\rightarrow A_4M = A_3M$. De cirkel door A_1, A_2 en A_3 gaat dus ook door A_4. Op dezelfde

manier kunnen we bewijzen, dat de cirkel ook door $A_5, A_6, \ldots A_n$ gaat en dus de omgeschreven cirkel van de n-hoek is. De n-hoek is dan een koorden-n-hoek.

Stelling 214: **Als een n-hoek regelmatig is, dan is het een raaklijnen-n-hoek.**

Bewijs: (fig.208) We tekenen de loodlijnen uit punt M op de zijden van de n-hoek. Uit de congruentie van de driehoeken A_1MA_2, A_2MA_3, A_3MA_4, . . ., A_nMA_1 (zie st. 213) volgt, dat ook de hoogtelijnen in die driehoeken uit M op de zijden van de n-hoek gelijk zijn. Maar dan liggen de voetpunten B_1, B_2, B_3, . . ., B_n op een cirkel met M als middelpunt. A_1A_2 staat loodrecht op B_1M in punt B_1, dus A_1A_2 raakt die cirkel. Hetzelfde geldt voor de andere zijden van de n-hoek. De n-hoek is dan een raaklijnen-n-hoek.

Opmerking: Het middelpunt van de omgeschreven cirkel en het middelpunt van de ingeschreven cirkel van een regelmatige n-hoek vallen samen, zoals uit bovenstaand bewijs is gebleken. We kunnen nu definiëren:

Definitie: Onder het middelpunt van een regelmatige n-hoek verstaan we het middelpunt van zijn ingeschreven of omgeschreven cirkel.

Definitie: Een middelpuntsdriehoek van een regelmatige n-hoek is een driehoek met als hoekpunten het middelpunt van de n-hoek en twee opvolgende hoekpunten van de n-hoek.

Opmerking: In het bewijs van stelling 213 blijkt, dat alle middelpuntsdriehoeken van een regelmatige n-hoek congrueren.

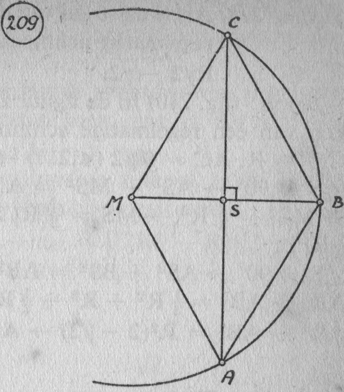
Definitie: De tophoek van een middelpuntsdriehoek van een regelmatige n-hoek heet de middelpuntshoek van die n-hoek.

Definitie: De hoogtelijn uit de top van een middelpuntsdriehoek van een regelmatige n-hoek heet het apothema van die n-hoek.

Stelling 215: **Als R de straal van de omgeschreven cirkel van een regelmatige zeshoek is, dan is de zijde a_6 van die zeshoek gelijk aan R.**

Bewijs: Bij een regelmatige zeshoek is een middelpuntshoek gelijk aan $360° : 6 = 60°$. Omdat een middelpuntsdriehoek gelijkbenig is, zijn de andere twee hoeken ook ieder 60°. De middelpuntsdriehoek is dus gelijkzijdig en de zijde van de regelmatige zeshoek is dan gelijk aan de straal van de omgeschreven cirkel.

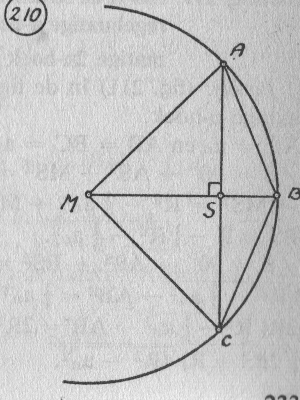
Stelling 216: **Als R de straal van de omgeschreven cirkel is van een regelmatige driehoek, dan is de zijde a_3 van die driehoek gelijk aan $R\sqrt{3}$.**



Bewijs: (fig. 209) In de figuur zien we twee middelpuntsdriehoeken van een regelmatige zeshoek. We moeten nu AC = a_3 in R uitdrukken. De zijden van AMCB zijn gelijk aan R, dus AMCB is een ruit (st.44), dus AS = CS. AS is hoogtelijn in de gelijkzijdige driehoek AMB. In $\triangle$AMS zijn de hoeken 30°, 60° en 90° en volgens stelling 120 is dan AS = $\frac{1}{2}R\sqrt{3}$, dus AC = $a_3 = R\sqrt{3}$.

Stelling 217: **Als R de straal van de omgeschreven cirkel van een regelmatige vierhoek is, dan is de zijde a_4 gelijk aan $R\sqrt{2}$.**

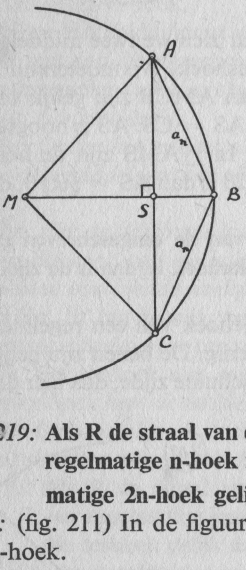
Bewijs: Een middelpuntsdriehoek van een regelmatige vierhoek is rechthoekig en gelijkbenig. De benen zijn gelijk aan R. Volgens stelling 121 is dan de schuine zijde, dus hier de zijde a_4, gelijk aan $R\sqrt{2}$.



Stelling 218: **Als R de straal van de omgeschreven cirkel van een regelmatige achthoek is, dan is de zijde a_8 gelijk aan $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.**

Bewijs: (fig. 210) In de figuur zijn twee middelpuntsdriehoeken van een regelmatige achthoek getekend. $AM = BM = CM = R$. $AC = R\sqrt{2}$ (st.217) $\rightarrow AS = CS = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$.
$\angle S = 90° \rightarrow AS^2 + MS^2 = AM^2 \rightarrow \frac{1}{2}R^2 + MS^2 = R^2 \rightarrow$
$\rightarrow MS^2 = \frac{1}{2}R^2 \rightarrow MS = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$. $BS = BM - SM = R - \frac{1}{2}R\sqrt{2}$.
$\angle S = 90° \rightarrow AS^2 + BS^2 = AB^2 \rightarrow \frac{1}{2}R^2 + (R - \frac{1}{2}R\sqrt{2})^2 = AB^2 \rightarrow AB^2 = \frac{1}{2}R^2 + R^2 + \frac{1}{2}R^2 - R^2\sqrt{2} \rightarrow 2R^2 - R^2\sqrt{2} = AB^2 \rightarrow AB^2 = R^2(2-\sqrt{2}) \rightarrow AB = a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

211



Stelling 219: **Als R de straal van de omgeschreven cirkel van een regelmatige n-hoek is, dan is de zijde van de regelmatige 2n-hoek gelijk aan $\sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}$.**

Bewijs: (fig. 211) In de figuur is AC de zijde van de regelmatige n-hoek.
$AC = a_n$ en $AB = BC = a_{2n}$. $AM = BM = CM = R$.
$\angle S = 90° \rightarrow AS^2 + MS^2 = AM^2 \rightarrow \frac{1}{4}a_n^2 + MS^2 = R^2 \rightarrow$
$\rightarrow MS^2 = R^2 - \frac{1}{4}a_n^2 \rightarrow MS = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}$.
$BS = R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}$.
$\angle S = 90° \rightarrow AS^2 + BS^2 = AB^2 \rightarrow AB^2 = \frac{1}{4}a_n^2 + (R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2} \rightarrow AB^2 = \frac{1}{4}a_n^2 + R^2 + R^2 - \frac{1}{4}a_n^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2} \rightarrow AB^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2} \rightarrow AB = a_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}}$.

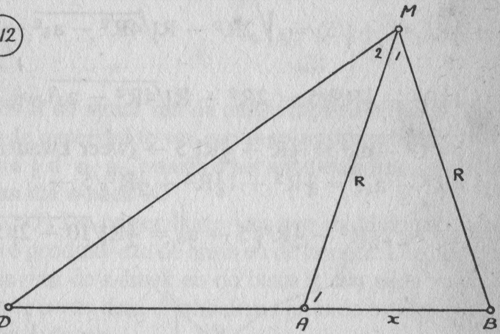
Opmerking: Deze formule staat bekend als de *verdubbelingsformule*. We zullen deze verdubbelingsformule nu toepassen om a_{12} te berekenen.

Stelling 220: **Als R de straal is van de omgeschreven cirkel van de regelmatige twaalfhoek, dan is de zijde a_{12} gelijk aan $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$.**

Bewijs: De zijde van de regelmatige zeshoek is R. Deze waarde substitueren we in de verdubbelingsformule.

$$a_{12} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - R^2}} \rightarrow a_{12} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{3}} \rightarrow$$
$$\rightarrow a_{12} = \sqrt{R^2(2-\sqrt{3})} \rightarrow a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

212



Stelling 221: **Als R de straal is van de omgeschreven cirkel van de regelmatige tienhoek, dan is de zijde a_{10} gelijk aan $\frac{1}{2}R(-1+\sqrt{5})$.**

Bewijs: (fig. 212) In de figuur is $\triangle MAB$ een middelpuntsdriehoek van de regelmatige tienhoek, dus $MA = MB = R$ en $AB = a_{10}$. We stellen nu $a_{10} = x$ en verdubbelen $\angle M_1$, dus $\angle M_2 = \angle M_1$.

$\angle M_1 = 360°:10 = 36°$. $\angle A_1 = \angle B = (180° - 36°):2 = 72°$.
$\angle M_{1,2} = 2 \cdot 36° = 72°$. $\angle D = 180° - 72° - 72° = 36°$, dus
$\angle M_2 = \angle D \rightarrow DA = MA = R$.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle B = 72° \\ \\ \angle M_1 = \angle D = 36°\end{array}\right\} \rightarrow \triangle MAB \sim \triangle DBM \rightarrow \text{ geval h.h.}$$

$\rightarrow AB:AM = BM:BD \rightarrow x:R = R:(R+x) \rightarrow$
$\rightarrow x^2 + Rx = R^2 \rightarrow x^2 + Rx - R^2 = 0.$

Met behulp van de abc-formule uit de algebra vinden we:

$$x_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \tfrac{1}{2}R(-1 \pm \sqrt{5}).$$

De waarde $x = \frac{1}{2}R(-1 - \sqrt{5})$ is negatief en voldoet niet.
We hebben dus gevonden $AB = a_{10} = \frac{1}{2}R(-1 + \sqrt{5})$.

Stelling 222: **Als R de straal van de omgeschreven cirkel van de regelmatige vijfhoek is, dan is de zijde a_5 gelijk aan $\frac{1}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.**

Bewijs: Met behulp van de verdubbelingsformule vinden we nu:

$$a_{10} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_5^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \tfrac{1}{2}R(-1 + \sqrt{5}) = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_5^2}} \rightarrow \text{(kwadr.)} \rightarrow$$

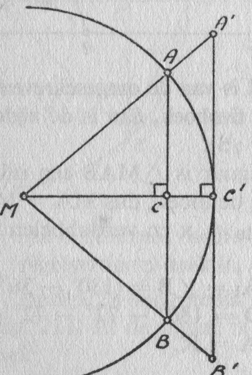
$$\rightarrow 1\tfrac{1}{2}R^2 - \tfrac{1}{2}R^2\sqrt{5} = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_5^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{4R^2 - a_5^2} = \tfrac{1}{2}R + \tfrac{1}{2}R\sqrt{5} \rightarrow \text{(weer kwadrateren)} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4R^2 - a_5^2 = \tfrac{1}{4}R^2 + 1\tfrac{1}{4}R^2 + \tfrac{1}{2}R^2\sqrt{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow a_5^2 = 2\tfrac{1}{2}R^2 - \tfrac{1}{2}R^2\sqrt{5} \rightarrow a_5 = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

(213)



Stelling 223: **Als A_n de zijde is van een omgeschreven regelmatige n-hoek van een cirkel met straal R, dan is A_n gelijk aan $\dfrac{2a_nR}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}$ waarin a_n de zijde van de ingeschreven regelmatige n-hoek is.**

Bewijs: (fig. 213) In de figuur zijn MAB en MA′B′ middel-

puntsdriehoeken van de regelmatige ingeschreven en omgeschreven n-hoek. Dan is AM = BM = C'M = R en AB = a_n.

$\angle C = 90° \rightarrow AC^2 + MC^2 = AM^2 \rightarrow \frac{1}{4} a_n^2 + MC^2 = R^2 \rightarrow$

$\rightarrow MC^2 = R^2 - \frac{1}{4} a_n^2 \rightarrow MC = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4} a_n^2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\angle C' = \angle C = 90° \\ \angle A'MC' = \angle AMC\end{array}\right\} \rightarrow \triangle A'MC' \sim \triangle AMC \rightarrow \text{ geval h. h.}$$

$\rightarrow A'C' : AC = C'M : CM \rightarrow$

$$\rightarrow \tfrac{1}{2}A_n : \tfrac{1}{2}a_n = R : \sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}a_n^2} \rightarrow A_n = \frac{a_n \cdot R}{\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}a_n^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow A_n = \frac{2a_n \cdot R}{\sqrt{4R^2 - a_n^2}}.$$

Stelling 224: **Als R de straal van de omgeschreven cirkel is, dan is de oppervlakte van een regelmatige n-hoek gelijk aan $\frac{1}{2}$ d · n · a_n, waarin d het apothema en a_n de zijde van die n-hoek is.**

Bewijs: (fig. 213) De oppervlakte van een middelpuntsdriehoek is het halve produkt van de basis en de hoogte. Die hoogte is het apothema van de n-hoek en de basis is een zijde van de n-hoek. Omdat er n van deze driehoeken zijn is de totale oppervlakte gelijk aan $\frac{1}{2}$ d·n·a_n.

Stelling 225: **Als R de straal van de ingeschreven cirkel is, dan is de oppervlakte van een regelmatige n-hoek gelijk aan $\frac{1}{2}$ R·n·A_n, waarin A_n de zijde van die n-hoek is.**

Bewijs: (fig. 213) De oppervlakte van één middelpuntsdriehoek is gelijk aan $\frac{1}{2}$ R · A_n. De totale oppervlakte is dus $\frac{1}{2}$ R · n · A_n.

De formules uit de stellingen 216 t/m 225 beginnen hoe langer hoe meer in onbruik te geraken, daar we meestal gebruik maken van goniometrische formules, die we hier wel zullen noemen, maar niet zullen bewijzen. De formules zijn:

$A_n = 2R \cdot \sin(180° : n)$.

$A_n = 2R \cdot \text{tg}(180° : n)$.

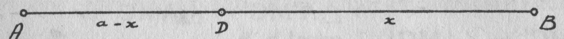
De oppervlakte van een ingeschreven regelmatige n-hoek is $\frac{1}{2} nR^2 \cdot \sin(360° : n)$.

De oppervlakte van een omgeschreven regelmatige n-hoek is $nR^2 \cdot \text{tg}(180° : n)$.

Definitie: Als een lijnstuk AB door een punt D op AB in twee delen verdeeld wordt zodanig, dat de verhouding van het kleinste en het grootste deel gelijk is aan de verhouding van het grootste

deel en het gehele lijnstuk, dan verdeelt D dat lijnstuk in uiterste en middelste reden.

214



Stelling 226: **Als een lijnstuk a in uiterste en middelste reden verdeeld is, dan is het grootste stuk $\frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5})$ en het kleinste stuk is $\frac{1}{2}a(3-\sqrt{5})$.**

Bewijs: (fig. 214) Lijnstuk AB = a. Stel het grootste stuk DB = x, dan is DA = a − x. Volgens de definitie van een verdeling in uiterste en middelste reden is AD : DB = DB : AB →

$$\rightarrow (a-x):x = x:a \rightarrow a^2 - ax = x^2 \rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4a^2}}{2} = -\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{5}.$$

De waarde $x = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\sqrt{5}$ is negatief en voldoet niet.

Dus $x = \frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5}) \rightarrow$

$\rightarrow DB = x = \frac{1}{2}a(-1+\sqrt{5}) \rightarrow$

$\rightarrow AD = a - x = a + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\sqrt{5} = \frac{1}{2}a(3-\sqrt{5})$.

Opmerking: Als we de straal van een cirkel in uiterste en middelste reden verdelen, dan is het grootste stuk gelijk aan de zijde van de ingeschreven regelmatige tienhoek. (Vergelijk st. 221.)

C. OMTREK EN OPPERVLAKTE VAN DE CIRKEL

Om de omtrek van een cirkel te kunnen definiëren, moeten we de algebra te hulp roepen en wel de volgende definities en stellingen:

Definitie: Een verzameling getallen heet naar boven begrensd, als er een getal bestaat, dat groter is dan alle getallen van die verzameling.

Definitie: Een verzameling getallen heet naar onderen begrensd, als er een getal bestaat, dat kleiner is dan alle getallen van die verzameling.

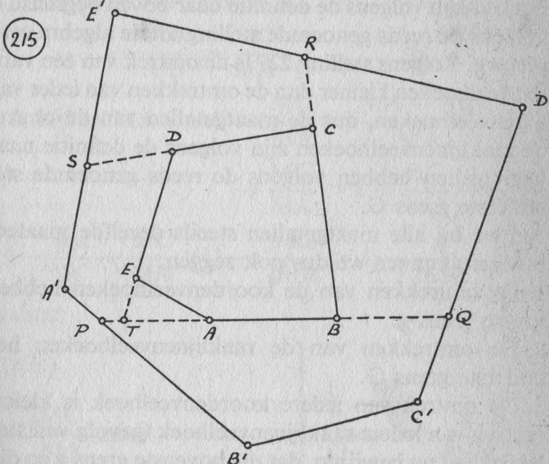
Definitie: Een verzameling getallen heeft een bovenste grens g, als geen enkel getal van die verzameling groter is dan g en als er bij elk positief getal d (hoe klein ook) een getal van de verzameling bestaat, dat groter is dan g − d.

Definitie: Een verzameling getallen heeft een onderste grens G, als geen enkel getal van de verzameling kleiner is dan G en als er bij elk positief getal d (hoe klein ook) een getal van de verzameling bestaat dat kleiner is dan G + d.

Stelling: **Een verzameling getallen, die naar boven begrensd is, heeft een bovenste grens.**

Stelling: **Een verzameling getallen, die naar onderen begrensd is, heeft een onderste grens.**

We zullen nu bewijzen, dat bij een cirkel de omtrekken van alle koordenveelhoeken een bovenste grens en de omtrekken van alle raaklijnenveelhoeken een onderste grens hebben. Dan bewijzen we, dat deze twee grenzen gelijk zijn en vervolgens definiëren we, dat de omtrek van de cirkel gelijk is aan deze twee grenzen.



Stelling 227: **Als alle punten van een convexe veelhoek V_1 inwendige (of eventueel voor een deel grenspunten) zijn van een convexe veelhoek V_2, dan is de omtrek van V_1 kleiner dan de omtrek van V_2.**

Bewijs: (fig. 215) We verlengen de zijde AB van V_1 tot de snijpunten P en Q op de zijden van V_2 (is A'B'C'D'E'). V_2 wordt door PQ verdeeld in twee veelhoeken, waarvan PQD'E'A' (is V_3) de veelhoek V_1 (is ABCDE) bevat. Omdat PQ < PB' + B'C' + C'Q is (st. 212), is de omtrek van V_3 kleiner dan die van V_2. We verlengen nu een volgende zijde BC van V_1.

Dan wordt V_3 verdeeld in twee veelhoeken, waarvan PBRE'A' (is V_4) veelhoek V_1 bevat en weer kleinere omtrek heeft dan V_3, want $RB < BQ + QD' + D'R$ (st. 212). Als we zo achtereenvolgens alle zijden van V_1 verlengd hebben behalve de laatste, waarbij dat niet nodig is, dan zijn we gekomen tot de omtrek van veelhoek V_1, die dan kleiner is dan de omtrekken van alle tussentijds gevormde veelhoeken en dus zeker ook kleiner is dan de omtrek van veelhoek V_2.

In een cirkel kunnen we een onbeperkt aantal koordenveelhoeken beschrijven. Om die cirkel kunnen we eveneens eens onbeperkt aantal raaklijnenveelhoeken beschrijven. Volgens stelling 227 is de omtrek van één van die raaklijnenveelhoeken groter dan de omtrekken van ieder van de koordenveelhoeken, dus de maatgetallen van de omtrekken van de koordenveelhoeken zijn volgens de definitie naar boven begrensd en hebben volgens de reeds genoemde stelling uit de algebra een bovenste grens g. Volgens stelling 227 is de omtrek van één van die koordenveelhoeken kleiner dan de omtrekken van ieder van de raaklijnenveelhoeken, dus de maatgetallen van de omtrekken van de raaklijnenveelhoeken zijn volgens de definitie naar onderen begrensd en hebben volgens de reeds genoemde stelling een onderste grens G.

Als we bij alle maatgetallen steeds dezelfde maateenheid gebruiken, kunnen we dus ook zeggen:

1. De omtrekken van de koordenveelhoeken hebben een bovenste grens g.
2. De omtrekken van de raaklijnenveelhoeken hebben een onderste grens G.
3. De omtrek van iedere koordenveelhoek is kleiner dan de omtrek van iedere raaklijnenveelhoek (gevolg van stelling 227).

We zullen nu bewijzen, dat die bovenste grens g en die onderste grens G gelijk zijn. Er zijn drie mogelijkheden: $g > G$, $g < G$ en $g = G$.

Geval 1: $g > G$. Het verschil van g en G noemen we 4d, dus

$$\left.\begin{array}{l} g - G = 4d \rightarrow g - d = G + 3d \\ G + 3d > G + d \end{array}\right\} \rightarrow g - d > G + d.$$

Volgens de definitie van bovenste grens is er zeker één koordenveelhoek, waarvan de omtrek groter is dan $g - d$.

Volgens de definitie van onderste grens is er zeker één raaklijnenveelhoek, waarvan de omtrek kleiner is dan $G + d$..

Omdat $g - d > G + d$ is, is er dan zeker één koordenveelhoek,

waarvan de omtrek groter is dan die van één van de raaklijnen-veelhoeken. Dit is echter in strijd met stelling 227. Hieruit volgt dus, dat g niet groter is dan G.

Geval 2: (fig. 213) $g < G$. We beschrijven in en om de cirkel een regelmatige n-hoek. In de figuur is van beide één middelpuntsdriehoek getekend en de hoogtelijnen uit M (die samenvallen).

$$\left.\begin{array}{l} \text{Omtrek koorden-n-hoek: } n \cdot a_n \rightarrow n \cdot a_n < g \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(st. bovenste grens)} \\ \text{Omtrek raaklijnen-n-hoek } n \cdot A_n \rightarrow n \cdot A_n > G \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(st. onderste grens)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{n \cdot a_n}{n \cdot A_n} < \frac{g}{n \cdot A_n} < \frac{g}{G} \rightarrow \frac{g}{G} > \frac{a_n}{A_n} \rightarrow \frac{g}{G} > \frac{AB}{A'B'}.$$

$$\triangle MAB \sim \triangle MA'B' \rightarrow AB : A'B' = MC : MC' = MC : MA \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{MC}{MA}.$$

$$\text{In } \triangle MCA \text{ is } MC > MA - AC \rightarrow \frac{MC}{MA} > \frac{MA - AC}{MA} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{MC}{MA} > 1 - \frac{AC}{MA} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{MC}{MA} > 1 - \frac{\frac{1}{2}a_n}{R} \rightarrow \frac{MC}{MA} > 1 - \frac{n \cdot a_n}{2n \cdot R} > 1 - \frac{g}{2n \cdot R}.$$

We hebben dus:

$$\left.\left.\begin{array}{l} \frac{g}{G} > \frac{AB}{A'B'} \text{(z.b.)} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{MC}{MA} \text{(z.b.)} \\ \frac{MC}{MA} > 1 - \frac{g}{2n \cdot R} \text{(z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{g}{G} > 1 - \frac{g}{2n \cdot R} \quad \right\} \rightarrow$$

Stel nu dat

$$G - g = d \rightarrow g = G - d \rightarrow \frac{g}{G} = \frac{G - d}{G} = 1 - \frac{d}{G}.$$

$$\rightarrow \text{Dus } 1 - \frac{d}{G} > 1 - \frac{g}{2n \cdot R}.$$

Deze betrekking geldt voor iedere willekeurige waarde van n. We nemen nu

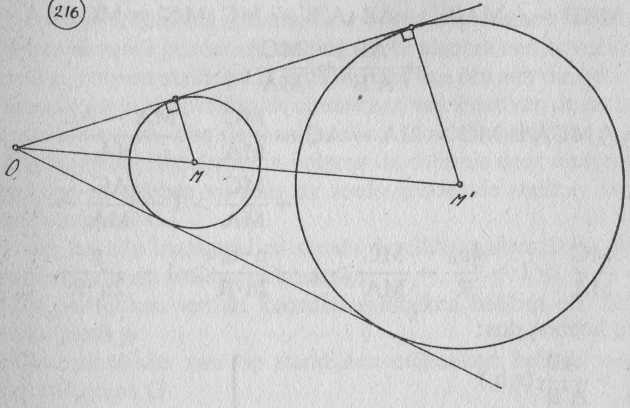
$$n > \frac{g \cdot G}{2d \cdot R} \rightarrow 2nR > \frac{g \cdot G}{d} \rightarrow \frac{1}{2n \cdot R} < \frac{d}{g \cdot G}$$

(want alle grootheden zijn positief) →

$$\rightarrow \frac{g}{2n \cdot R} < \frac{d}{G} \rightarrow 1 - \frac{g}{2n \cdot R} > 1 - \frac{d}{G}.$$

Dit is in strijd met de hierboven gevonden betrekking, dus g is niet kleiner dan G.
De conclusie is dus, dat $g = G$, d.w.z. de bovenste grens van de omtrekken van de koordenveelhoeken is gelijk aan de onderste grens van de omtrekken van de raaklijnenveelhoeken.
We kunnen nu definiëren:

216



Definitie: Onder de omtrek van een cirkel verstaan we de bovenste grens van de omtrekken van de koordenveelhoeken, die in de cirkel beschreven kunnen worden, òf de onderste grens van de omtrekken van de raaklijnenveelhoeken, die om de cirkel beschreven kunnen worden.

We gaan nu aantonen, dat de omtrekken L en L′ van twee cirkels (M, r) en (M′, r′) zich verhouden als $r : r'$.

Bewijs: (fig. 216) Stel $r : r' = k$. Er zijn drie mogelijkheden: $L : L' > k$, $L : L' < k$ en $L : L' = k$.

Geval 1: $L : L' > k \rightarrow L > k \cdot L'$. Stel $L - k \cdot L' = 2d$. → $\rightarrow L - d = k \cdot L' + d$. Nu is er in cirkel (M, r) een koordenveelhoek, waarvan de omtrek L_1 groter is dan $L - d$ (def. bovenste grens), dus L_1 is groter dan $k \cdot L' + d$, dus groter dan $k \cdot L'$. We vermenigvuldigen cirkel (M, r) met 1/k vanuit O...

Dan gaat cirkel (M, r) over in cirkel (M′, r′) en de koordenveelhoek gaat over in een koordenveelhoek, die in cirkel (M′, r′) is beschreven. De omtrek L_1 van die koordenveelhoek wordt ook met 1/k vermenigvuldigd en wordt dus $L_1' = L_1 : k$. Maar L_1 was groter dan $k \cdot L'$, dus $L_1 : k > L'$ of $L_1' > L'$. We hebben dan in cirkel (M′ ,r′) een koordenveelhoek, waarvan de omtrek L_1' groter is dan L′, hetgeen in strijd is met de definitie van bovenste grens. Dus L : L′ is niet groter dan k.

Geval 2: $L : L' < k \rightarrow L < k \cdot L'$. Stel $k \cdot L' - L = 2d \rightarrow$ $\rightarrow k \cdot L' - d = L + d$. Nu is er om cirkel (M, r) een raaklijnenveelhoek, waarvan de omtrek L_2 kleiner is dan L + d (def. onderste grens), dus $L_2 < k \cdot L' - d$, dus $L_2 < k \cdot L'$. Vermenigvuldigen we weer cirkel (M, r) met 1/k vanuit O_u, dan gaat de raaklijnenveelhoek, die om cirkel (M, r) beschreven is, over in een andere raaklijnenveelhoek, die om cirkel (M′, r′) beschreven is. De omtrek L_2 wordt dan met 1/k vermenigvuldigd en wordt dus $L_2' = L_2 : k$. Maar L_2 was kleiner dan $k \cdot L'$,dus L_2' is kleiner dan L′. We hebben dan om cirkel (M′, r′) een raaklijnenveelhoek, waarvan de omtrek kleiner is dan L′, wat in strijd is met de definitie van onderste grens. Dus L : L′ is niet kleiner dan k. De conclusie is, dat L : L′ = k. Omdat r : r′ = k is, hebben we L : L′ = r : r′.

Uit deze evenredigheid volgt, dat L : r = L′ : r′, d.w.z. dat er een vaste verhouding bestaat tussen de omtrek en de straal van een cirkel. Deze constante verhouding heeft men aangeduid door 2π, dus $L : r = 2\pi$ of $L = 2\pi \cdot r$. Hiermee is aangetoond

Stelling 228: **Als r de straal van een cirkel is, dan is de omtrek van die cirkel gelijk aan $2\pi \cdot r$.**

Men heeft dat getal π kunnen benaderen in elk gewenst aantal decimalen. π is namelijk een onmeetbaar getal en naar men heeft kunnen aantonen zelfs een transcendent getal, d.w.z. dat π geen wortel is van een hogere-machtsvergelijking met meetbare coëfficiënten. Enige praktische benaderingen voor π zijn $3^1/_7$ en 3,14.

Definitie: Onder de lengte van een boog van a° van een cirkel verstaan we het a/360 deel van de omtrek van die cirkel.

Om de oppervlakte van een cirkel te bepalen is een soortgelijke redenering nodig als bij de omtrek van de cirkel.

We tonen eerst weer aan, dat de oppervlakten van de in een cirkel beschreven koordenveelhoeken een bovenste grens g hebben. Daarna laten we zien, dat de oppervlakten van de om die cirkel beschreven raaklijnenveelhoeken een onderste grens

G hebben. Tenslotte bewijzen we weer, dat g en G gelijk zijn en dan kunnen we definiëren:

Definitie: Onder de oppervlakte van een cirkel verstaan we de bovenste grens van de oppervlakten van de koordenveelhoeken, die in de cirkel beschreven kunnen worden òf de onderste grens van de oppervlakten van de raaklijnenveelhoeken, die om de cirkel beschreven kunnen worden.

We bewijzen dan, dat de oppervlakten van twee cirkels zich verhouden als de kwadraten van hun stralen en tenslotte vinden we:

Stelling 229: **Als r de straal van een cirkel is, dan is de oppervlakte van die cirkel gelijk aan πr^2.**

Opmerking: De lezer kan zelf trachten de bewijzen te vinden geheel naar analogie van de bij de omtrek van een cirkel gevolgde redeneringen.

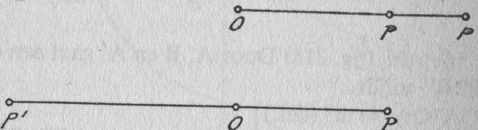
Definitie: Onder de oppervlakte van een cirkelsector met een boog van a° in een cirkel verstaan we het $a/360$ deel van de oppervlakte van die cirkel.

Om de oppervlakte van een cirkelsegment met een boog van a° te berekenen, bepalen we de oppervlakte van een cirkelsector met een boog van a° en verminderen (of vermeerderen) deze met de oppervlakte van de middelpuntsdriehoek, waarvan de middelpuntshoek a° is.

XV. INVERSIE

In hoofdstuk VII hebben we al aangekondigd, dat we nog een transformatie zouden bespreken, namelijk *de inversie*. Deze transformatie is van een geheel ander karakter dan de transformaties, die we in hoofdstuk VII hebben leren kennen. Het was daar steeds zo, dat een rechte in een rechte overging en dat is bij de inversie niet het geval.

217



Definitie: Onder het inverteren van een punt P vanuit een centrum O met een macht $\pm k^2$ *verstaan we het bepalen van het punt P', dat op OP ligt, terwijl* $OP \cdot OP' = \pm k^2$. Is de macht van inversie k^2, dan liggen P en P' aan dezelfde kant van O (fig. 217). Is de macht van inversie $-k^2$, dan liggen P en P' aan verschillende kanten van O. We noemen P' het beeldpunt of *het inverse punt* van P.

Definitie: De cirkel met O als middelpunt en k als straal heet de grondcirkel van de inversie.

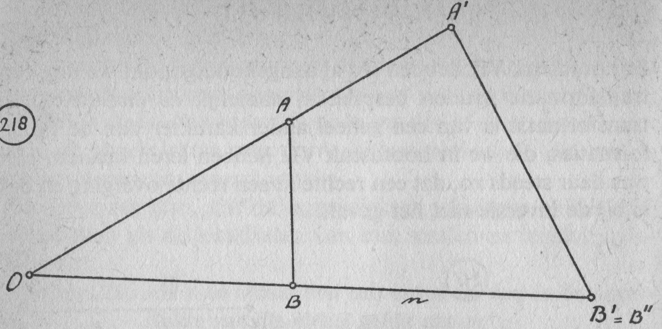
Definitie: Onder het inverteren van een figuur F vanuit een centrum O met een macht $\pm k^2$ *verstaan we het bepalen van de figuur F', die ontstaat, als we op ieder punt van F de inversie* $(O, \pm k^2)$ *toepassen.*

Als we op alle punten van een figuur F de inversie (O, k^2) toepassen en eveneens de inversie $(O, -k^2)$, dan kunnen we het beeld van de inversie $(O, -k^2)$ ook verkrijgen door op het beeld van de inversie (O, k^2) de vermenigvuldiging $(O, -1)$ toe te passen.

Als een figuur F door een inversie (O, k^2) overgaat in de figuur F' dan zal, zoals gemakkelijk uit de definitie blijkt, de figuur F' door de inversie (O, k^2) weer overgaan in de figuur F. We noemen de inversie daarom wel een *involutorische* transformatie.

Stelling 230: **Als twee punten A en B bij de inversie (O, k^2) overgaan in A' en B', dan is AA'B'B een koordenvierhoek.**

218



Bewijs: (fig. 218) Door A, B en A′ gaat een cirkel, die n nog in B″ snijdt.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} OA\cdot OA' = k^2 \text{ (def.)} \\ OB\cdot OB' = k^2 \text{ (def.)}\end{array}\right\} \rightarrow OA\cdot OA' = OB\cdot OB' \\ \text{Volgens stelling 168 is } OA\cdot OA' = OB\cdot OB''\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow OB' = OB''.$$

Dus B′ en B″ vallen samen. Omdat A, B, A′ en B″ op een cirkel liggen is dat ook het geval met A, B, A′ en B′, dus AA′B′B is een koordenvierhoek.

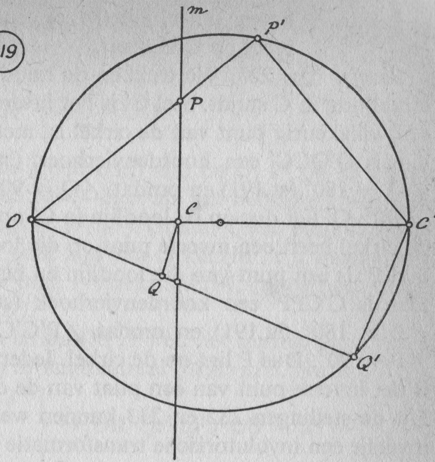
Stelling 231: **Als een rechte lijn m geïnverteerd wordt volgens (O, k²) en O ligt op m, dan is de inverse figuur een rechte m′, die met m samenvalt.**

Bewijs: Als A een punt van m is, dan ligt volgens de definitie het inverse punt A′ met O en A op een rechte. De rechte door O en A is m, dus A′ ligt op m. Ieder punt van m heeft dus een inverse punt, dat ook op m ligt. Bovendien is ieder punt van m het inverse punt van een punt van m. Het oneindig verre punt van m heeft O als inverse punt en omgekeerd.

Stelling 232: **Als een rechte lijn m geïnverteerd wordt volgens (O, k²) en O ligt niet op m, dan is de inverse figuur van m een cirkel die door O gaat.**

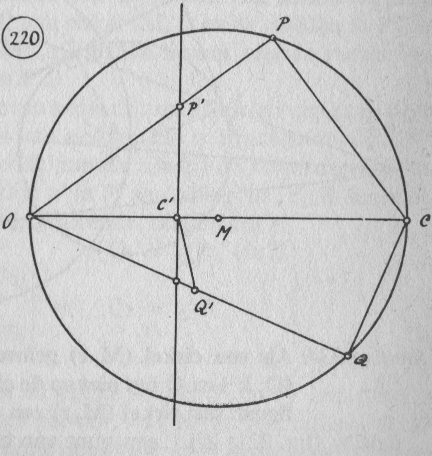
Bewijs: (fig. 219) We laten de loodlijn OC uit O op m neer. Stel dat C′ het inverse punt van C is. Het oneindig verre punt van m heeft O als inverse punt. Zij P een willekeurig punt van m, dan is CC′P′P een koordenvierhoek (st.231), dus $\angle C + \angle P' = 180°$ (st.191). Omdat $\angle C = 90°$ is, is $\angle P' = 90°$, dus P′ ligt op de cirkel, die OC′ als middellijn heeft (st.115). Dan heeft dus ieder punt van de rechte m een inverse punt op diezelfde cirkel.

219



Zij Q′ een willekeurig punt van de cirkel en het inverse punt van Q, dan is QQ′C′C een koordenvierhoek (st.231), dus $\angle QCC' + \angle Q' = 180°$ (st.191) en omdat $\angle Q' = 90°$ (st.73) is dus $\angle QCC' = 90°$. Maar dan moet Q wel een punt zijn van m, want QC en m staan beide in C loodrecht op OC. Ieder punt van de cirkel is dus het inverse punt van een punt van m.

220

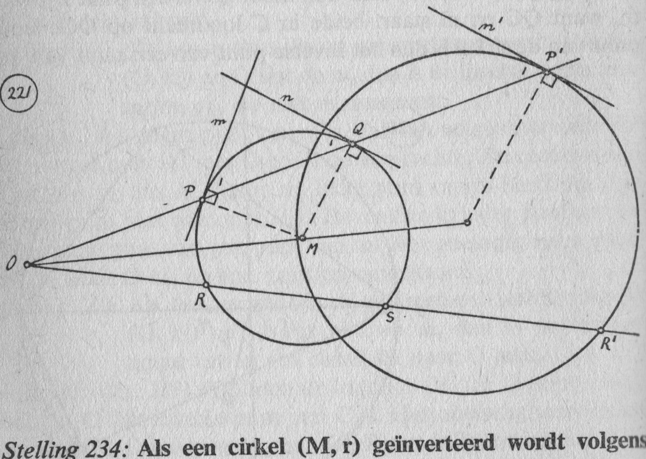


Stelling 233: **Als een cirkel (M, r) geïnverteerd wordt volgens (O, k^2) en O ligt op de cirkel, dan is de inverse**

figuur van cirkel (M, r) een rechte lijn, die loodrecht op OM staat.

Bewijs: (fig. 220) We trekken de middellijn door O, die de cirkel nog in C snijdt. Stel C′ is het inverse punt van C. Als Q een willekeurig punt van de cirkel is, met Q′ als inverse punt, dan is Q′QCC′ een koordenvierhoek (st.231) → $\angle Q'C'C + \angle Q = 180°$ (st.191) en omdat $\angle Q = 90°$ (st.73), is $\angle Q'C'C = 90°$. Q′ ligt dus op de loodlijn in C′ op OM. Ieder punt van de cirkel heeft een inverse punt op die loodlijn.
Stel P′ is een punt van die loodlijn en het inverse punt van P. Dan is C′CPP′ een koordenvierhoek (st.231) → $\angle P'C'C + \angle P = 180°$ (st.191) en omdat $\angle P'C'C = 90°$, is dus ook $\angle P = 90°$. Dus P ligt op de cirkel. Ieder punt van de loodlijn is het inverse punt van een punt van de cirkel.
Uit de stellingen 232 en 233 kunnen we concluderen, dat de inversie een involutorische transformatie is, want als O buiten m ligt, dan gaat m door de inversie (O, k^2) over in een cirkel. Passen we nu op deze cirkel dezelfe inversie (O, k^2) toe, dus geen inverse transformatie, doch precies dezelfde transformatie, dan gaat de cirkel weer over in de oorspronkelijke rechte m.

221



Stelling 234: **Als een cirkel (M, r) geïnverteerd wordt volgens (O, k^2) en O ligt niet op de cirkel, dan is de inverse figuur van cirkel (M, r) een cirkel (M′, r′).**

Bewijs: (fig. 221) Zij P een punt van cirkel (M, r) en P′ het inverse punt van P. De rechte door O en P snijdt cirkel (M, r) ook nog in Q. We hebben nu $OP \cdot OP' = k^2$ (def.) en $OP \cdot OQ =$

m^2 (als m^2 de macht is van O t.o.v. cirkel (M, r)) Deling van beide betrekkingen geeft

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{k^2}{m^2} \quad \text{of} \quad OP' = \frac{k^2}{m^2} \cdot OQ.$$

Daar k^2 en m^2 vaste grootheden zijn en O, P′ en Q op een rechte liggen, kunnen we P′ zien als het beeldpunt van Q bij de vermenigvuldiging (O, k^2/m^2). Omdat Q een punt van cirkel (M, r) is, zal P′ een punt zijn van cirkel (M′, r′), waarbij $r' = (k^2/m^2) \cdot r$. Dus ieder punt P van cirkel (M, r) heeft een inverse punt op cirkel (M′, r′).

Zij R′ een punt van cirkel (M′, r′) en het inverse punt van R. De rechte door O en R′ snijdt cirkel (M, r) in S. Nu is

$$\left.\begin{array}{l} OR \cdot OR' = k^2 \text{ (def.)} \\ OR' = (k^2/m^2) \cdot OS \end{array}\right\} \rightarrow OR \cdot (k^2/m^2) \cdot OS = k^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow OR \cdot OS = m^2.$$

Maar als $OR \cdot OS = m^2$ en S ligt op cirkel (M, r), dan ligt R ook op cirkel (M, r), want m^2 is de macht van O t.o.v. cirkel (M, r). Ieder punt van cirkel (M′, r′) is het inverse punt van een punt van cirkel (M, r).

Stelling 235: **Als de cirkel (M, r) door de inversie (O, k^2) overgaat in de cirkel (M′, r′) en P en P′ zijn twee inverse punten van de cirkels, dan maken de raaklijn in P aan cirkel (M, r) en de raaklijn in P′ aan cirkel (M′, r′) gelijke hoeken met de rechte door O, P en P′.**

Bewijs: (fig. 221) m en n zijn de raaklijnen in P en Q aan cirkel (M, r). In het bewijs van stelling 234 is al aangetoond, dat Q en P′ corresponderende punten zijn bij de vermenigvuldiging (O, (k^2/m^2). De raaklijn n′ in P′ aan cirkel (M′, r′) is dus evenwijdig met n (corresponderende raaklijnen)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle P_1 = \tfrac{1}{2}\text{bg } PQ \text{ (st.76)} \\ \angle Q_1 = \tfrac{1}{2}\text{bg } PQ \text{ (st.76)} \end{array}\right\} \rightarrow \angle Q_1 = \angle P_1 \\ \qquad\qquad \angle Q_1 = \angle P_1' \text{ (st.7)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

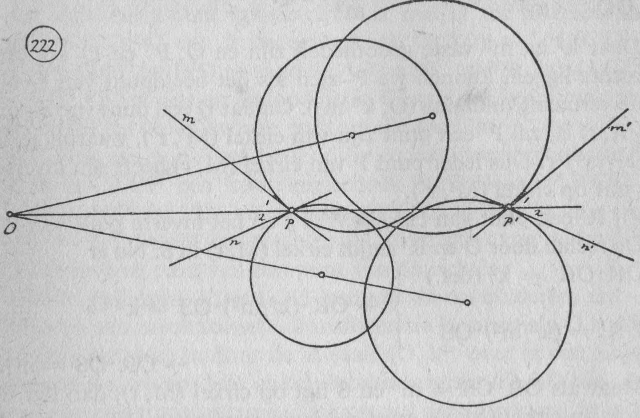
$$\rightarrow \angle P_1 = \angle P_1'.$$

Opmerking: Omdat de gelijke hoeken P_1 en P_1' hun opening niet naar dezelfde kant hebben, kunnen we ook zeggen, dat de beide raaklijnen de rechte door O, P en P′ *onder supplementaire hoeken* snijden.

Stelling 236: **Als twee cirkels elkaar snijden onder een bepaalde**

hoek, dan snijden hun inverse cirkels elkaar onder dezelfde hoek, als het centrum van de inversie niet op de cirkels ligt.

(222)



Bewijs: (fig. 222) Het snijpunt P van de cirkels gaat over in het snijpunt P′ van de inverse cirkels. Als m en m′ de raaklijnen zijn in P en P′ aan de ene cirkel en aan zijn inverse cirkel, dan is $\angle P_1 = \angle P_1'$ (st.235). Als n en n′ de raaklijnen zijn in P en P′ aan de tweede cirkel en aan zijn inverse cirkel, dan is $\angle P_2 = \angle P_2'$ (st.235). Hieruit volgt, dat $\angle P_{1,2} = \angle P_{1,2}'$. De raaklijnen in P aan de twee cirkels maken dezelfde hoek met elkaar als de raaklijnen in P′ aan de twee inverse cirkels. De twee cirkels snijden elkaar dus onder dezelfde hoek als hun inverse cirkels.

Stelling 237: **Als de punten A en B bij de inversie (O, k²) overgaan in A′ en B′, dan is** $A'B' = \dfrac{k^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}$

Bewijs: (fig. 218)

$$\left.\begin{array}{l} OA \cdot OA' = k^2 \text{ (def.)} \\ OB \cdot OB' = k^2 \text{ (def.)} \end{array}\right\} \rightarrow OA \cdot OA' = OB \cdot OB' \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \rightarrow OA : OB = OB' : OA' \\ \angle O = \angle O \end{array}\right\} \rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OB'A' \rightarrow \text{ geval z.h.z.}$$

$$\rightarrow AB : A'B' = OA : OB' \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{OB' \cdot OB}{OA \cdot OB} \rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{k^2}{OA \cdot OB} \rightarrow A'B' = \frac{k^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}.$$

De stelling over de hoek van twee cirkels (st.236) kan algemener geformuleerd en bewezen worden. De stelling geldt in het algemeen voor de hoek van twee krommen en de hoek van hun inverse krommen. Bovendien kunnen we een rechte lijn opvatten als een cirkel met een oneindig grote straal. We gebruiken deze stelling vooral bij het construeren van cirkels, die aan bepaalde voorwaarden moeten voldoen, zoals later nog zal blijken. Stelling 237 wordt gebruikt om bepaalde betrekkingen, waarin produkten van lijnstukken voorkomen, te bewijzen.

XVI. CONSTRUCTIES

Hoewel we aanvankelijk bij het bestuderen van de meetkunde nog wel eens gebruik maken van een gradenboog en van de cm-verdeling op de lineaal, is dit later niet meer toegestaan. Bij het construeren van meetkundige figuren mogen we een passer en een lineaal gebruiken, maar deze laatste alleen om rechte lijnen te tekenen en dus niet om mee te meten. Er bestaat weliswaar een aantal lineaalconstructies, d.w.z. constructies, die uitgevoerd kunnen worden door uitsluitend een lineaal te gebuiken, maar die zullen we hier niet bespreken.

Voordat we overgaan tot het uitvoeren van constructies, dienen we een aantal grondconstructies te kennen. Deze worden dan gevolgd door een serie andere werkstukken, die in hun onderdelen steeds weer geheel of gedeeltelijk tot dit eerste zestal grondconstructies terug te brengen zijn. Wel merken we nog op, dat we aannemen, dat we de volgende constructies zonder meer kunnen uitvoeren: Het tekenen van een punt, van een lijn, van een lijnstuk. Het afpassen van een lijnstuk van gegeven lengte op een gegeven rechte. Het tekenen van een cirkel, waarvan het middelpunt en de straal bekend zijn.

Nu volgt eerst de beschrijving van zes grondconstructies. Aan de linkerkant staat steeds de figuur, waarvan we uitgaan en daarnaast staat dezelfde figuur, maar nu nadat de constructie uitgevoerd is. De cijfertjes geven de volgorde van de bewerkingen aan. Met (1) = (2) wordt bedoeld, dat de bogen 1 en 2 uit de figuur met dezelfe passeropening gemaakt zijn.

Constructie 1: Construeer de middelloodlijn van een lijnstuk AB.

Oplossing: (fig. 223) 1. Zet de passer in A en maak boog 1.
2. Zet de passer in B en maak boog 2. (2) = (1). We vinden C en D.
3. Trek middelloodlijn 3 door C en D.

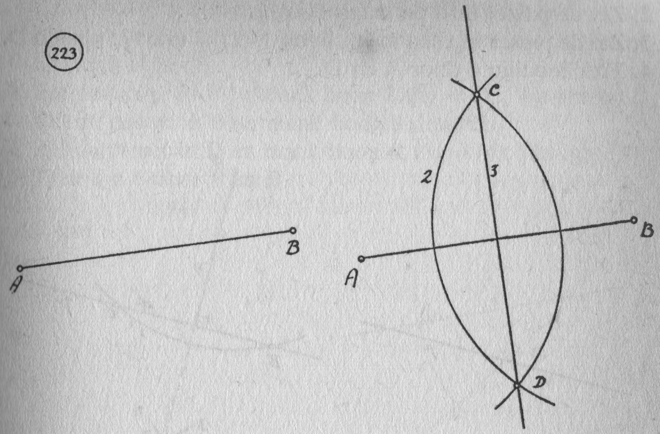
Constructie 2: Construeer de bissectrice van ∠ P.

Oplossing: (fig. 224) 1. Zet de passer in P en maak boog 1. We vinden A en B.
2. Zet de passer in A en maak boog 2.
3. Zet de passer in B en maak boog 3. (3) = (2). We vinden C.
4. Trek bissectrice 4 door B en C.

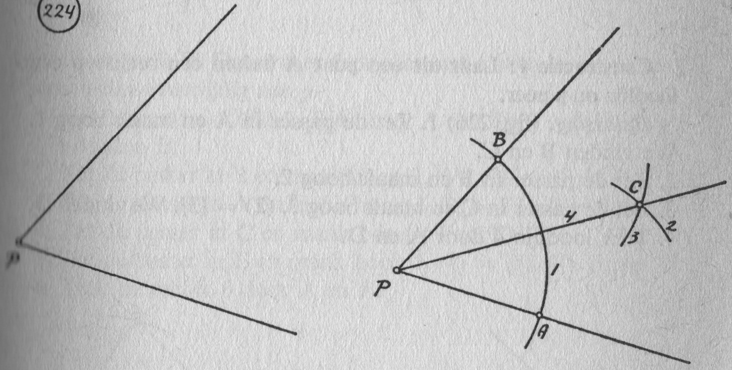
Constructie 3: Richt op lijn p een loodlijn op in punt A van p.

Oplossing: (fig. 225) 1. Zet de passer in A en maak boog 1. We vinden B en C.

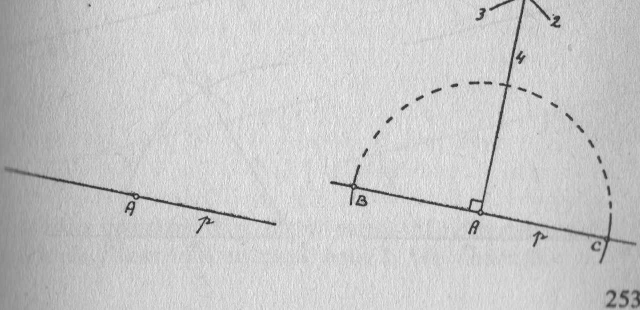
223



224

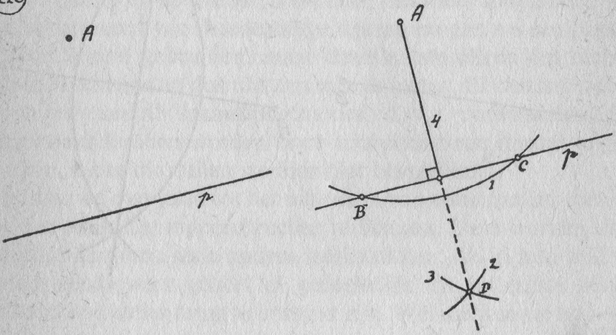


225



2. Zet de passer in B en maak boog 2.
3. Zet de passer in C en maak boog 3. (2) = (3). We vinden **D.**
4. Trek loodlijn 4 door A en D.

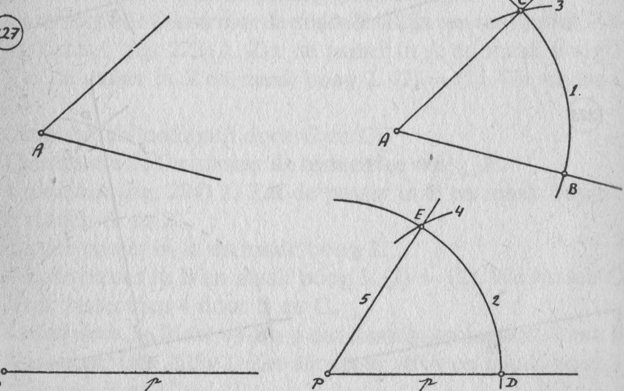
(226)



Constructie 4: Laat uit een punt A buiten een rechte p een loodlijn op p neer.

Oplossing: (fig. 226) 1. Zet de passer in A en maak boog 1. We vinden B en C.
2. Zet de passer in B en maak boog 2.
3. Zet de passer in C en maak boog 3. (2) = (3). We vinden D.
4. Trek loodlijn 4 door A en D.

(227)

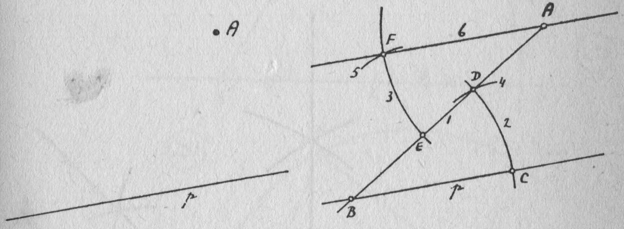


Constructie 5: Breng ∠A over naar punt P op lijn p.

Oplossing: (fig. 227) 1. Zet de passer in A en maak boog 1. We vinden B en C.

2. Zet de passer in P en maak boog 2. (2) = (1). We vinden D.
3. Zet de passer in B en maak boog 3 door C.
4. Zet de passer in D en maak boog 4. (3) = (4). We vinden E.
5. Trek lijn 5 door P en E.

228a

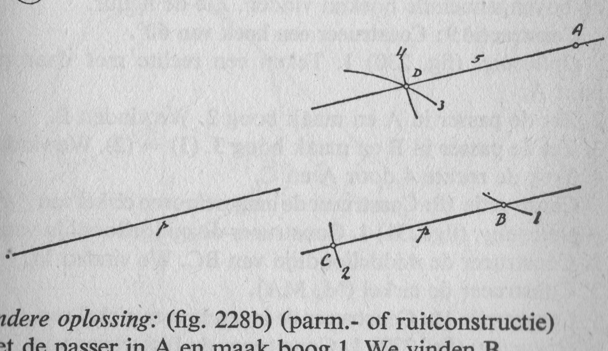


Constructie 6: Construeer door een punt A buiten een rechte p een rechte evenwijdig aan p.

Oplossing: (fig. 228a) 1. Trek door A een lijn 1 (willekeurig). We vinden B.

2. Zet de passer in B en maak boog 2. We vinden C en D.
3. Zet de passer in A en maak boog 3. (2) = (3). We vinden E.
4. Zet de passer in C en maak boog 4 door D.
5. Zet de passer in E en maak boog 5. (4) = (5). We vinden F.
6. Trek de rechte 6 door A en F.

228b



Andere oplossing: (fig. 228b) (parm.- of ruitconstructie)

1. Zet de passer in A en maak boog 1. We vinden B.

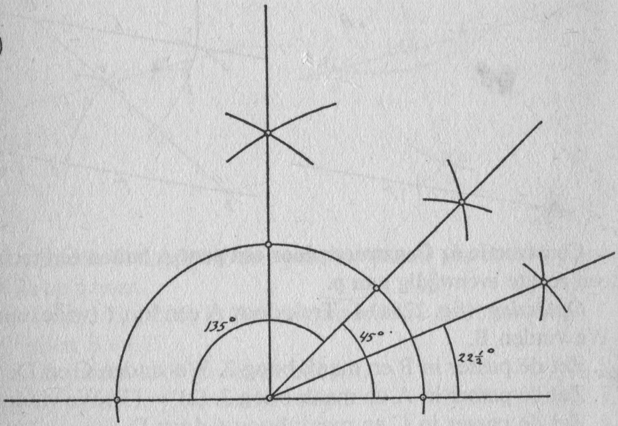
2. Zet de passer in B en maak boog 2. (2) = (1). We vinden C.
3. Zet de passer in C en maak boog 3. (3) = (2).
4. Zet de passer in A en maak boog 4. (4) = (3). We vinden D.
5. Trek lijn 5 door A en D.

We kennen een groot aantal directe toepassingen van deze grondconstructies:

Constructie 7: Construeer een hoek van 90°.

Oplossing: Dit is een toepassing zonder meer van de derde constructie.

(229)



Constructie 8: Construeer een hoek van 45°, 135°, 22½°, enz.

Oplossing: (fig. 229) We gaan uit van een hoek van 90° en door het construeren van één of meer bissectrices kunnen we de bovengenoemde hoeken vinden. Zie de figuur.

Constructie 9: Construeer een hoek van 60°.

Oplossing: (fig. 230) 1. Teken een rechte met daarop een punt A.
2. Zet de passer in A en maak boog 2. We vinden B.
3. Zet de passer in B en maak boog 3. (3) = (2). We vinden C.
4. Trek de rechte 4 door A en C.

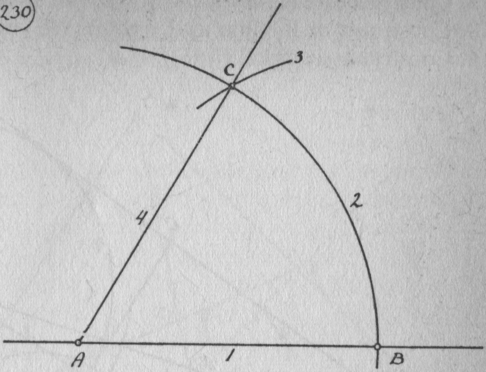
Constructie 10: Construeer de omgeschreven cirkel van △ABC.

Oplossing: (fig. 231) 1. Construeer de middelloodlijn van AB.
2. Construeer de middelloodlijn van BC. We vinden M.
3. Construeer de cirkel (M, MA).

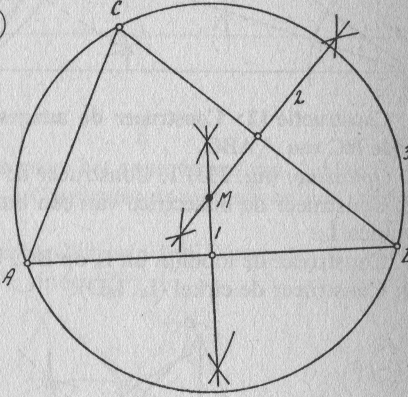
Constructie 11: Construeer de ingeschreven cirkel van △ABC.

Oplossing: (fig. 232) 1. Construeer de bissectrice van ∠A.

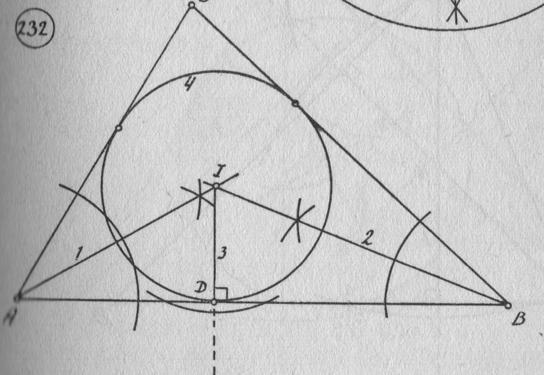
(230)



(231)

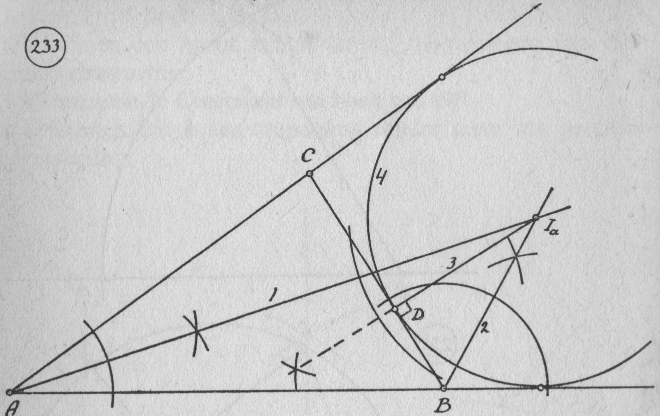


(232)



2. Construeer de bissectrice van ∠B. We vinden I.
3. Construeer de loodlijn uit I op AB. We vinden D.
4. Construeer de cirkel (I, ID).

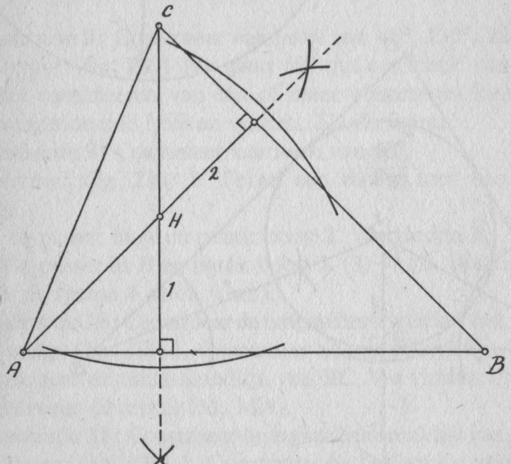
(233)



Constructie 12: Construeer de aangeschreven cirkel aan de zijde BC van △ABC.

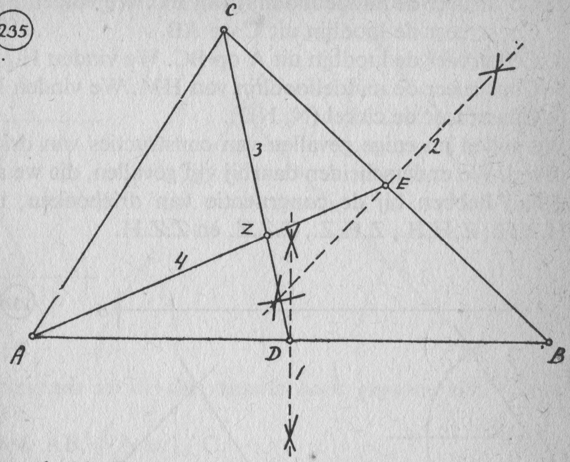
Oplossing: (fig. 233) 1. Construeer de bissectrice van ∠A.
2. Construeer de bissectrice van een buitenhoek van ∠B. We vinden I_a.
3. Construeer de loodlijn uit I_a op BC. We vinden D.
4. Construeer de cirkel (I_a, I_aD).

(234)



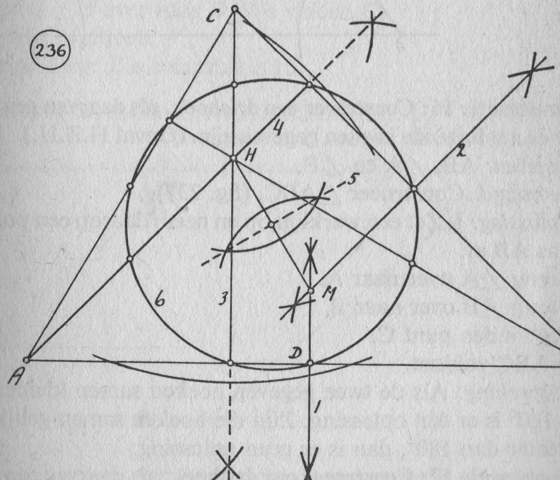
Constructie 13: Construeer het hoogtepunt van △ABC.
Oplossing: (fig. 234) 1. Laat uit C de loodlijn neer op AB.
2. Laat uit A de loodlijn neer op BC. We vinden H.

235



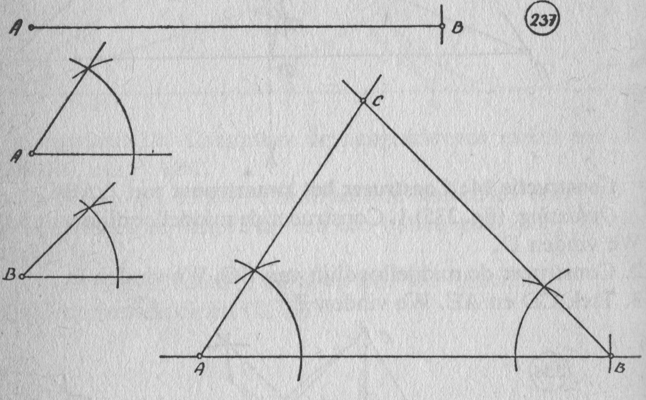
Constructie 14: Construeer het zwaartepunt van △ABC.
Oplossing: (fig. 235) 1. Construeer de middelloodlijn van AB. We vinden D.
2. Construeer de middelloodlijn van BC. We vinden E.
3. Trek CD en AE. We vinden Z.

236



Constructie 15: Construeer de negenpuntscirkel van $\triangle$ABC.
Oplossing: (fig. 236) 1. Construeer de middelloodlijn van AB. We vinden D.
2. Construeer de middelloodlijn van BC. We vinden M.
3. Construeer de loodlijn uit C op AB.
4. Construeer de loodlijn uit A op BC. We vinden H.
5. Construeer de middelloodlijn van HM. We vinden N.
6. Construeer de cirkel (N, ND).

We zullen nu enige gevallen van constructies van driehoeken geven. We onderscheiden daarbij vijf gevallen, die we al eerder gehad hebben bij de congruentie van driehoeken, namelijk H.Z.H., Z.H.H., Z.H.Z., Z.Z.Z. en Z.Z.H.

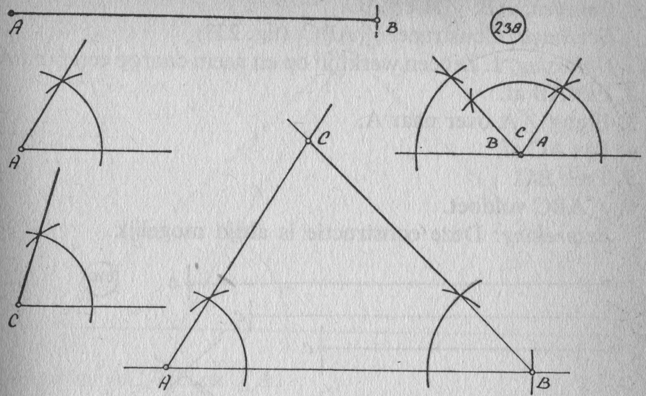


Constructie 16: Construeer een driehoek, als daarvan een zijde en twee aanliggende hoeken gegeven zijn. (Geval H.Z.H.)
Gegeven: AB, $\angle$A en $\angle$B.
Gevraagd: Construeer $\triangle$ABC. (fig. 237)
Oplossing: 1. Zet een werklijn op en neem daarop een punt A.
2. Pas AB af.
3. Breng $\angle$A over naar A.
4. Breng $\angle$B over naar B.
5. We vinden punt C.
6. $\triangle$ABC voldoet.

Bespreking: Als de twee gegeven hoeken samen kleiner zijn dan 180° is er één oplossing. Zijn die hoeken samen gelijk aan of groter dan 180°, dan is er geen oplossing.

Constructie 17: Construeer een driehoek, als daarvan een zijde,

een aanliggende en de overstaande hoek gegeven zijn. (Geval Z.H.H.)



een aanliggende en de overstaande hoek gegeven zijn. (Geval Z.H.H.)

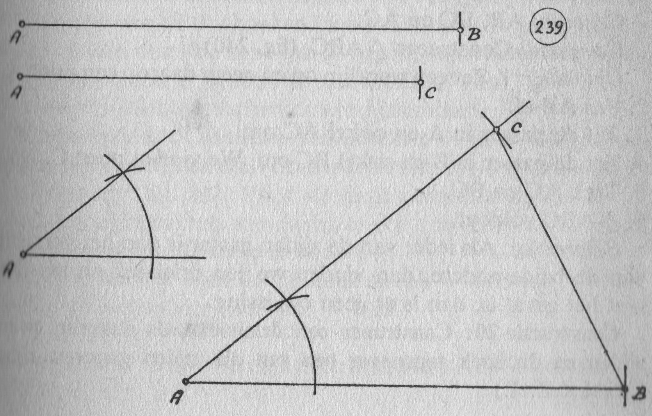
Gegeven: AB, ∠A en ∠C.

Gevraagd: Construeer △ABC. (fig. 238)

Oplossing: 1. Zet een werklijn op en neem daarop een punt A.

2. Pas AB af.
3. Breng ∠A over naar A.
4. Construeer ∠B in een hulpconstructie (volgens st.11).
5. Breng ∠B over naar B. We vinden C.
6. △ABC voldoet.

Bespreking: Zie constructie 16.



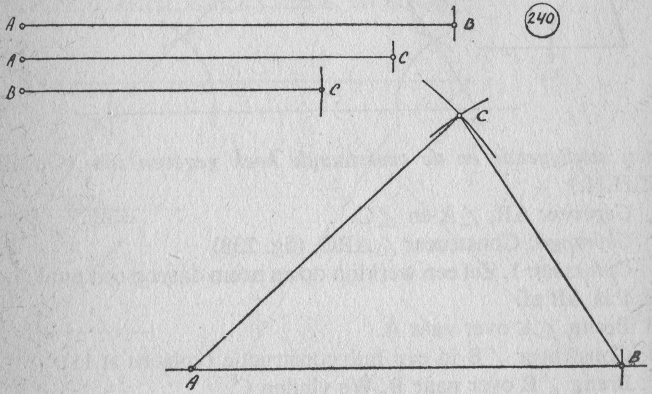
Constructie 18: Construeer een driehoek, als daarvan twee zijden en de ingesloten hoek gegeven zijn. (Geval Z.H.Z.)

Gegeven: AB, ∠A en AC.

Gevraagd: Construeer △ABC. (fig. 239)

Oplossing: 1. Zet een werklijn op en neem daarop een punt A.
2. Pas AB af.
3. Breng ∠A over naar A.
4. Pas AC af.
5. Trek BC.
6. △ABC voldoet.

Bespreking: Deze constructie is altijd mogelijk.



Constructie 19: Construeer een driehoek, als daarvan drie zijden gegeven zijn. (geval Z.Z.Z.)

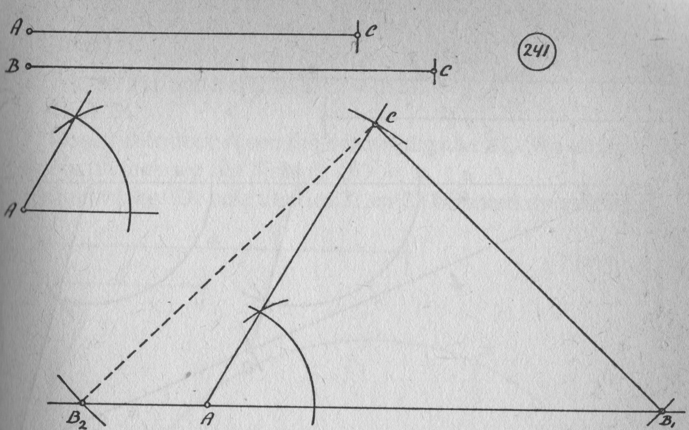
Gegeven: AB, BC en AC.

Gevraagd: Construeer △ABC. (fig. 240)

Oplossing: 1. Zet een werklijn op en neem daarop een punt A.
2. Pas AB af.
3. Zet de passer in A en cirkel AC om.
4. Zet de passer in B en cirkel BC om. We vinden punt C.
5. Trek AC en BC.
6. △ABC voldoet.

Bespreking: Als ieder van de zijden groter is dan het verschil van de beide andere, dan vinden we één driehoek en als dat niet het geval is, dan is er geen oplossing.

Constructie 20: Construeer een driehoek, als daarvan twee zijden en de hoek tegenover een van die zijden gegeven zijn. (geval Z.Z.H.)



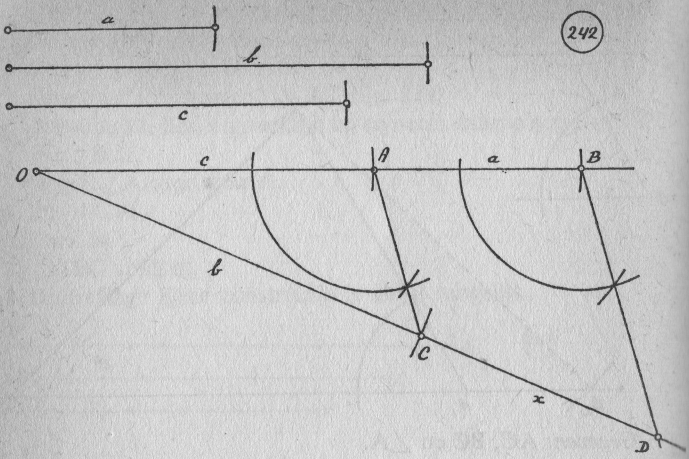
Gegeven: AC, BC en ∠A.
Gevraagd: Construeer △ABC. (fig. 241)
Oplossing: Zet een werklijn op en neem daarop een punt A.
2. Breng ∠A over naar A.
3. Pas AC af.
4. Zet de passer in C en cirkel CB om. We vinden B_1 en B_2.
5. Trek CB_1 en CB_2.
6. △AB_1C voldoet. △AB_2C voldoet niet.

Bespreking: Als we de tweede zijde, dus hier CB, omcirkelen, dan zijn er drie mogelijkheden: 1. We vinden geen snijpunt B. Er is dan geen oplossing. 2. We vinden een raakpunt B. Er is dan één oplossing. 3. We vinden twee snijpunten B_1 en B_2. Als B_1 en B_2 aan verschillende kanten van A liggen, dan voldoet slechts één van de driehoeken (zoals hier dus het geval is). Als B_1 en B_2 aan dezelfde kant van A liggen, dan voldoen de beide driehoeken, ook al hebben ze niet dezelfde vorm.
Nu volgen enkele constructies van lijnstukken.

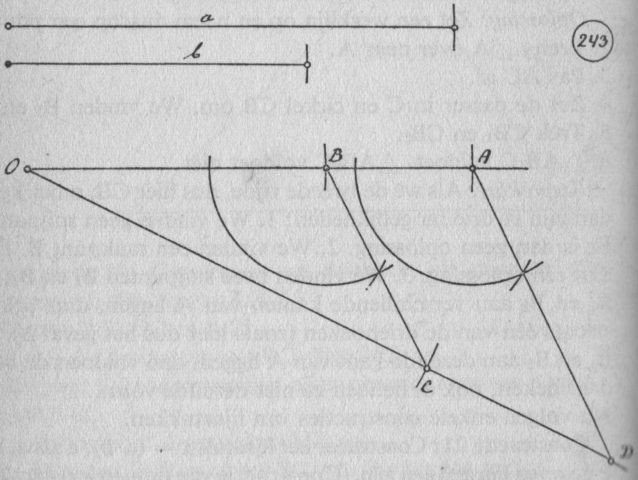
Constructie 21: Construeer het lijnstuk $x = (a \cdot b)/c$ als a, b en c gegeven lijnstukken zijn. (Constructie van de *vierde evenredige*)

Oplossing: (fig. 242) Voor we gaan construeren, passen we enige herleidingen toe. $x = (a \cdot b)/c \rightarrow x \cdot c = a \cdot b \rightarrow c : a = b : x$

Constructie: 1. Teken een hoek O.
2. Pas op het ene been de lijnstukken OA = c en AB = a af.
3. Pas op het andere been OC = b af.
4. Trek AC.
5. Construeer door B een lijn evenwijdig aan AC. We vinden D.
6. CD = x.



242



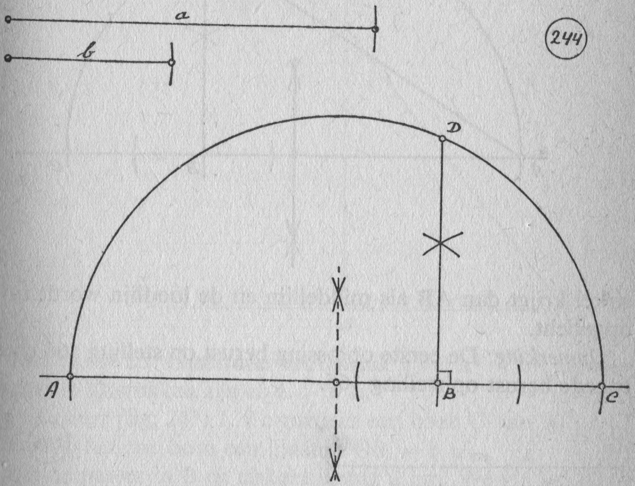
243

Constructie 22: Construeer het lijnstuk x = a²/b, als a en b gegeven lijnstukken zijn. (Constructie van *de derde evenredige*)

Oplossing: (fig. 243) Eerst weer enige herleidingen. $x = a^2/b \rightarrow x \cdot b = a \cdot a \rightarrow b : a = a : x$. Nu weer de constructie, die we in het vorige geval hebben toegepast. Op het ene been van de hoek passen we b en a af en op het andere been ook a. Daarna kunnen we dan x vinden. We zullen de constructie iets gewijzigd uitvoeren, wat van belang kan zijn, als a en b nogal lang zijn.

Constructie: 1. Teken een hoek O.
2. Pas op het ene been de lijnstukken OB = b en OA = a af.
3. Pas op het andere been OC = a af.
4. Trek BC.
5. Construeer door A een lijn evenwijdig aan BC. We vinden D.
6. Nu hebben we het lijnstuk OD = x.

Opmerking: De constructies 21 en 22 berusten op stelling 65.

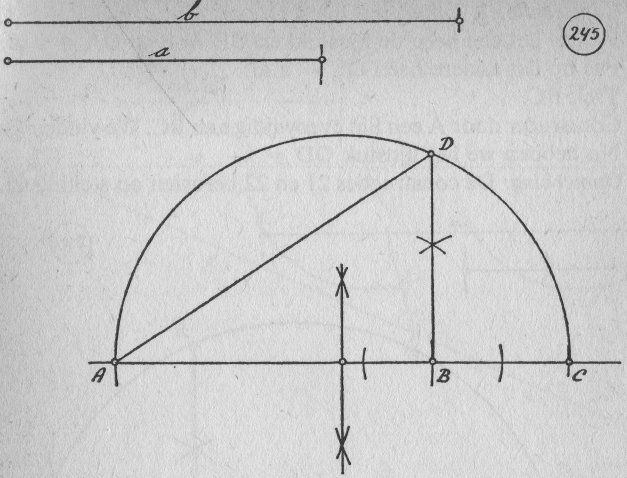


Constructie 23: Construeer het lijnstuk $x = \sqrt{a \cdot b}$, als a en b gegeven lijnstukken zijn. (Constructie van *de middelevenredige*)

Oplossing 1: (fig. 244) 1. Zet een werklijn op en neem daarop een punt A.
2. Pas AB = a af en pas BC = b af.
3. Construeer de cirkel, waarvan AC middellijn is.
4. Richt in B een loodlijn op AC op. We vinden D.
5. Het lijnstuk BD = x.

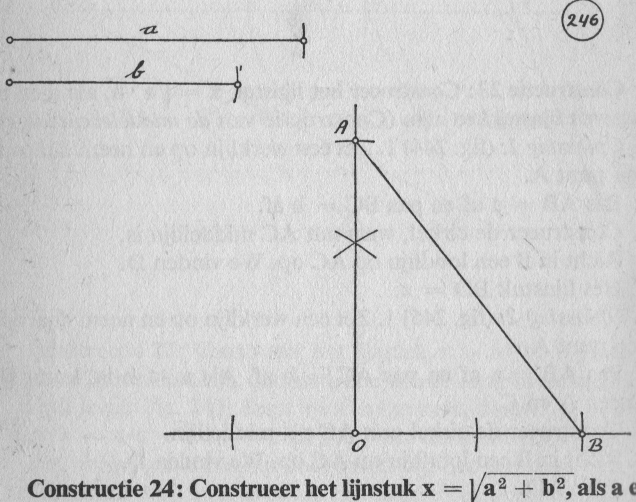
Oplossing 2: (fig. 245) 1. Zet een werklijn op en neem daarop een punt A.
2. Pas AB = a af en pas AC = b af. Als $a < b$ is, komt B tussen A en C.
3. Construeer de cirkel met AC als middellijn.
4. Richt in B een loodlijn op AC op. We vinden D.
5. Trek AD.
6. Het lijnstuk AD = x.

Opmerking: Als $a > b$ is, dan komt C tussen A en B. De



cirkel krijgt dan AB als middellijn en de loodlijn wordt in C opgericht.

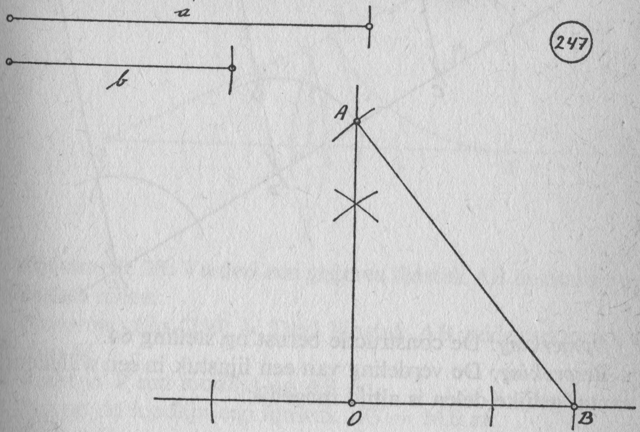
Opmerking: De eerste oplossing berust op stelling 166 en de tweede berust op stelling 165.



Constructie 24: Construeer het lijnstuk $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, als a en b gegeven lijnstukken zijn.

Oplossing: (fig. 246) 1. Construeer een hoek O van 90°.

2. Pas op het ene been een lijnstuk OA = a af en op het andere been een lijnstuk OB = b.
3. Trek AB.
4. Het lijnstuk AB = x.



Constructie 25: Construeer het lijnstuk $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, als a en b gegeven lijnstukken zijn en a > b is.

Oplossing: (fig. 247) 1. Construeer een hoek O van 90°.
2. Pas op het ene been een lijnstuk OB = b af.
3. Zet de passer in B en cirkel lijnstuk a om. We vinden A.
4. Het lijnstuk OA = x.

Opmerking: De constructies 24 en 25 berusten op de stelling van Pythagoras. (st. 117)

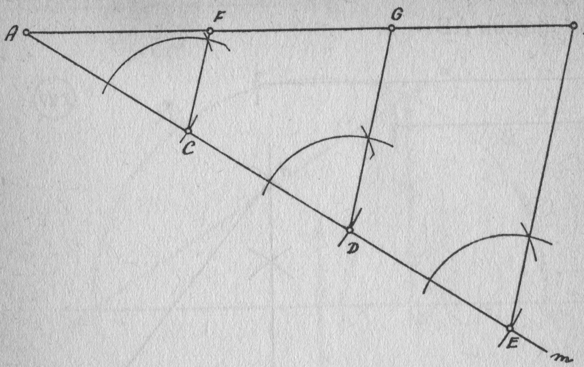
Bespreking: De constructies 21 t/m 25 geven altijd een oplossing.

Constructie 26: Verdeel een gegeven lijnstuk in enige gelijke delen.

Oplossing: (fig. 248) We zullen het lijnstuk AB hier in drie gelijke delen verdelen. De constructie blijft principieel hetzelfde als men het lijnstuk in meer dan drie gelijke delen verdeelt.

Constructie: 1. Trek een willekeurige lijn m door A.
2. Pas hierop vanuit A drie willekeurige gelijke stukken AC, CD en DE af.
3. Trek EB.
4. Construeer door C en D lijnen evenwijdig aan EB. We vinden F en G.
5. De lijnstukken AF, FG en GB zijn gelijk.

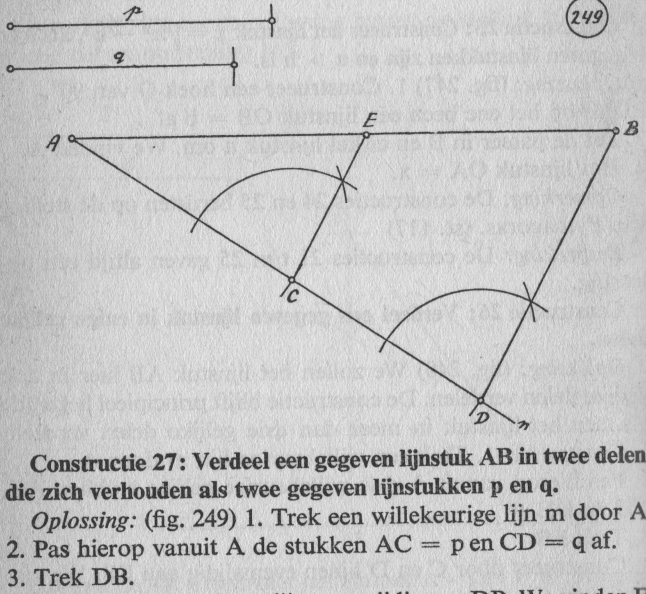
248



Opmerking: De constructie berust op stelling 64.

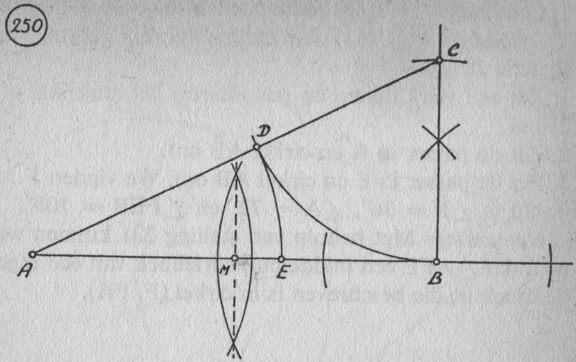
Bespreking: De verdeling van een lijnstuk in een willekeurig aantal gelijke delen is altijd mogelijk.

249



Constructie 27: Verdeel een gegeven lijnstuk AB in twee delen, die zich verhouden als twee gegeven lijnstukken p en q.

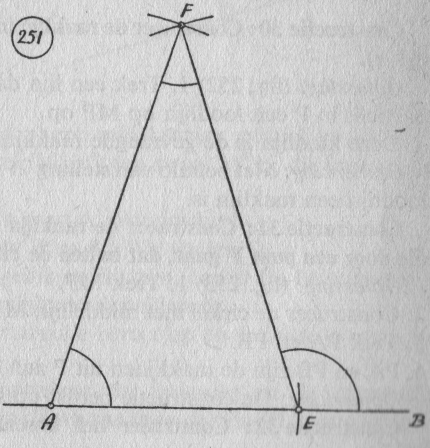
Oplossing: (fig. 249) 1. Trek een willekeurige lijn m door A.
2. Pas hierop vanuit A de stukken AC = p en CD = q af.
3. Trek DB.
4. Construeer door C een lijn evenwijdig aan DB. We vinden E.
5. EA en EB zijn de gevraagde delen.



Constructie 28: Verdeel een gegeven lijnstuk AB in uiterste en middelste reden.

Oplossing: (fig. 250) 1. Deel lijnstuk AB middendoor. We vinden M.
2. Richt in B een loodlijn op AB op.
3. Pas op de loodlijn een lijnstuk BC = MB af.
4. Trek AC.
5. Zet de passer in C en cirkel CB om. We vinden D.
6. Zet de passer in A en cirkel AD om. We vinden E.
7. E is het gevraagde deelpunt en AE en EB zijn respectievelijk het grote en het kleine stuk.

Opmerking: Uit een berekening kan blijken, dat we inderdaad de in stelling 226 genoemde stukken verkregen hebben.



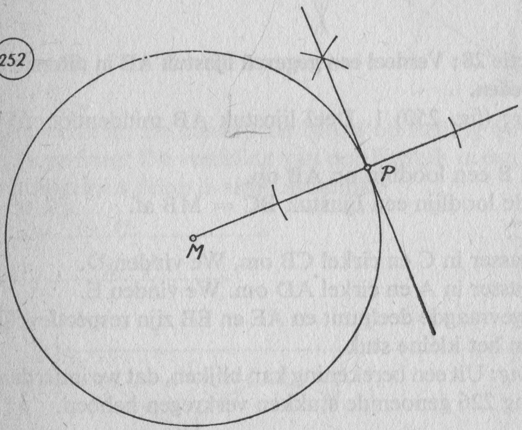
Constructie 29: Construeer hoeken van 36°, 72° en 108°.

Oplossing: (fig. 251) We maken hierbij gebruik van constructie 28.

1. Zet een werklijn op en pas daarop het stuk AE uit figuur 250 af.
2. Zet de passer in A en cirkel AB om.
3. Zet de passer in E en cirkel AB om. We vinden F.
4. Nu is $\angle F = 36°$, $\angle A = 72°$ en $\angle FEB = 108°$.

Opmerking: Met behulp van stelling 221 kunnen we aantonen, dat $\triangle$AFE een middelpuntsdriehoek van een regelmatige tienhoek is, die beschreven is in cirkel (F, FA).

252



Constructie 30: Construeer de raaklijn in een punt P van cirkel (M, r).

Oplossing: (fig. 252) 1. Trek een lijn door M en P.

2. Richt in P een loodlijn op MP op.
3. Deze loodlijn is de gevraagde raaklijn.

Opmerking: Met behulp van stelling 71 is aan te tonen, dat de loodlijn een raaklijn is.

Constructie 31: Construeer de raaklijn aan een cirkel (M, r) die door een punt P gaat, dat buiten de cirkel ligt.

Oplossing: (fig. 253) 1. Trek MP.

2. Construeer de cirkel met middellijn MP. We vinden A en B.
3. Trek PA en PB.
4. PA en PB zijn de raaklijnen uit P aan cirkel (M, r)

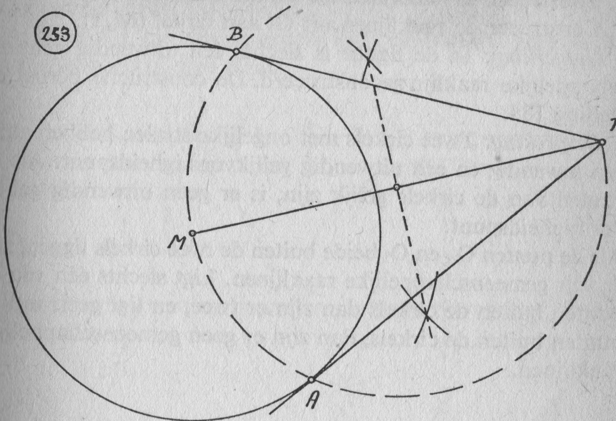
Opmerking: De constructie berust op stelling 115.

Constructie 32: Construeer het inwendig en het uitwendig

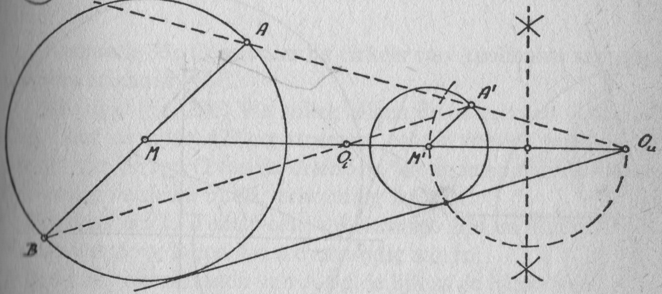
gelijkvormigheidspunt van twee cirkels (M, r) en (M′, r′).

Oplossing: (fig. 254) 1. Trek de rechte door M en M′.

253



254



2. Teken in cirkel (M, r) een willekeurige middellijn AMB.
3. Construeer in cirkel (M′, r′) een straal M′A′, die evenwijdig is aan MA.
4. Trek de rechte door A en A′. We vinden O_u.
5. Trek de rechte door B en A′. We vinden O_i.
6. Als MA en M′A′ gelijkgericht zijn, dan is O_u het uitwendig en O_i het inwendig gelijkvormigheidspunt.

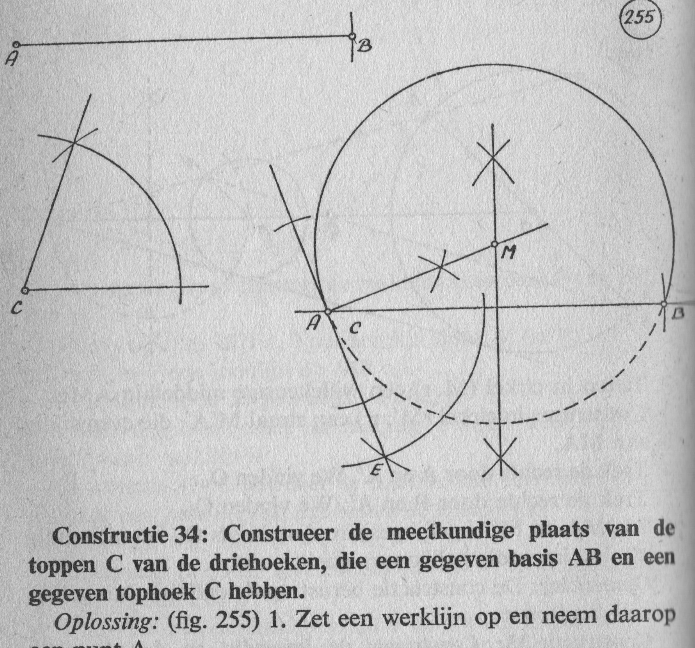
Opmerking: De constructie berust op de definitie van gelijkvormigheidspunt.

Constructie 33: Construeer de inwendig en de uitwendig gemeenschappelijke raaklijnen van twee cirkels (M, r) en (M′, r′).

Oplossing: (fig. 254) 1. Construeer de punten O_u en O_i. (zie constructie 32)
2. Construeer de raaklijnen uit O_u aan cirkel (M′, r′).
3. Construeer de raaklijnen uit O_i aan cirkel (M, r).

Opmerking: In de figuur is slechts één uitwendig gemeenschappelijke raaklijn geconstrueerd. De constructie berust op stelling 185.

Bespreking: Twee cirkels met ongelijke stralen hebben altijd een inwendig en een uitwendig gelijkvormigheidspunt. Als de stralen van de cirkels gelijk zijn, is er geen uitwendig gelijkvormigheidspunt.
Als de punten O_u en O_i beide buiten de twee cirkels liggen, zijn er vier gemeenschappelijke raaklijnen. Ligt slechts één van de punten buiten de cirkels dan zijn er twee, en ligt geen van de punten buiten de cirkels, dan zijn er geen gemeenschappelijke raaklijnen.

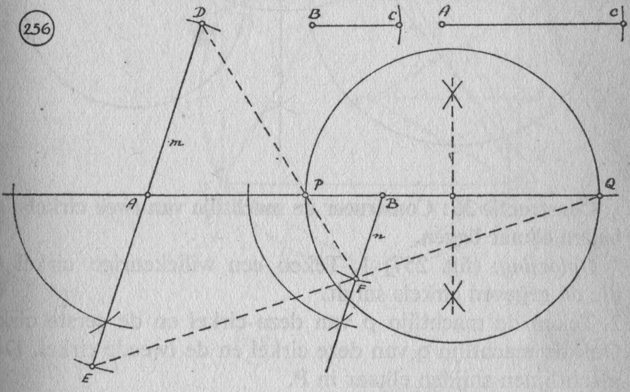


Constructie 34: Construeer de meetkundige plaats van de toppen C van de driehoeken, die een gegeven basis AB en een gegeven tophoek C hebben.

Oplossing: (fig. 255) 1. Zet een werklijn op en neem daarop een punt A.
2. Pas AB af.

3. Breng ∠C over naar A ('onder' AB).
4. Richt in A een loodlijn op AE op.
5. Construeer de middelloodlijn van AB. We vinden M.
6. Construeer cirkel (M, MA).
7. De boog AB, die aan de andere kant van AB ligt als E is de gevraagde meetkundige plaats.

256



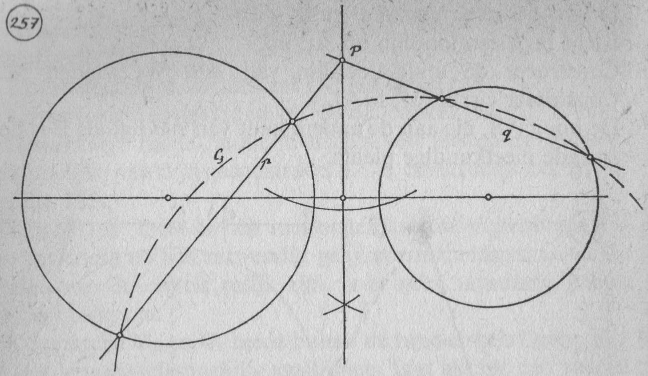
Constructie 35: Construeer de cirkels van Apollonius van een gegeven driehoek ABC.

Oplossing: (fig. 256) We zullen alleen de cirkel van Apollonius voor de zijde AB construeren, echter zonder gebruik te maken van de top C van de driehoek. We moeten nu AB in- en uitwendig verdelen in de verhouding AC : BC.

Constructie: 1. Teken een willekeurige lijn m door A en construeer door B een lijn n evenwijdig aan m.
2. Pas naar weerskanten van A op de lijn m de lijnstukken AD en AE af, die beide gelijk zijn aan AC.
3. Pas vanuit B op n het lijnstuk BF af, dat gelijk is aan BC.
4. Trek DF en EF. We vinden P en Q.
5. Construeer de cirkel met PQ als middellijn.
6. Deze cirkel is de meetkundige plaats van de toppen C van de driehoeken, waarvan de opstaande zijden zich verhouden als AC : BC.

Opmerking: De constructie berust op stelling 115. Meestal is de verhouding van de opstaande zijden gegeven als p : q, waarbij p en q gegeven lijnstukken zijn.

Bespreking: Iedere driehoek heeft drie cirkels van Apollonius.



Constructie 36: Construeer de machtlijn van twee cirkels, die buiten elkaar liggen.

Oplossing: (fig. 257) 1. Teken een willekeurige cirkel C_3, die de gegeven cirkels snijdt.

2. Teken de machtlijn p van deze cirkel en de eerste cirkel. Ook de machtlijn q van deze cirkel en de tweede cirkel. Deze machtlijnen snijden elkaar in P.

3. Laat uit P de loodlijn op de centraal van de gegeven cirkels neer.

4. Deze loodlijn is de gevraagde machtlijn.

Opmerking: De constructie berust op de stellingen 200, 201 en 203.

Bespreking: Als de ene cirkel geheel binnen de andere cirkel ligt, blijft de constructie hetzelfde. Als de cirkels concentrisch zijn, dan is er geen machtlijn. (De machtlijn is dan de oneindig verre rechte.)

Constructie 37: Construeer in een cirkel een regelmatige zeshoek, driehoek en twaalfhoek.

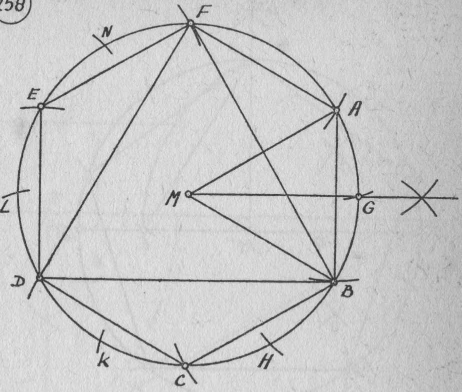
Oplossing: (fig. 258) 1. Neem een willekeurig punt A op cirkel (M, r).

2. Zet de passer in A en cirkel r om. We vinden B.

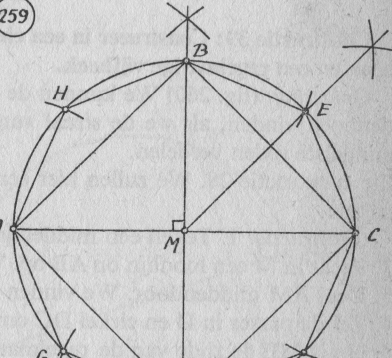
3. Zet de passer in B en cirkel r om. We vinden C. Zo doorgaande vinden we zes punten op de cirkel, die de hoekpunten zijn van een regelmatige zeshoek. Verbinden we drie punten, die niet aan elkaar grenzen, dan hebben we een regelmatige driehoek. Als we ∠AMB middendoor delen, dan vinden we punt G. Zetten we nu de passer in G en cirkelen we r om, dan vinden we H. Ook dit kunnen we weer herhalen tot we in to-

taal twaalf punten op de cirkel hebben, die de hoekpunten zijn van een regelmatige twaalfhoek.

258



259



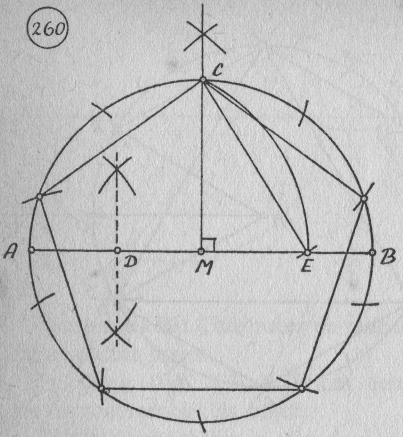
Constructie 38: Construeer in een cirkel een regelmatige vierhoek en een regelmatige achthoek.

Oplossing: (fig. 259) 1. Teken een willekeurige middellijn AMC en construeer een middellijn BMD, die loodrecht op AB staat. Nu zijn A, B, C en D de hoekpunten van een regelmatige vierhoek.

2. Deel $\angle$BMC middendoor, dan vinden we punt E. Zet de passer in E en cirkel AB om en herhaal dit nog twee maal. We

hebben dan acht punten op de cirkel, die de hoekpunten zijn van een regelmatige achthoek.

260



Constructie 39: Construeer in een cirkel een regelmatige tienhoek en een regelmatige vijfhoek.

Oplossing: (fig. 260) We kunnen de zijde van de regelmatige tienhoek vinden, als we de straal van de cirkel in uiterste en middelste reden verdelen.
Zie constructie 28. We zullen hier een andere constructie toepassen.

Constructie: 1. Teken een middellijn AMB.
2. Richt in M een loodlijn op AB op. We vinden C.
3. Deel AM middendoor. We vinden D.
4. Zet de passer in D en cirkel DC om. We vinden E.
5. Nu is ME de zijde van de regelmatige tienhoek, die we dus tien maal op de cirkel kunnen omcirkelen en CE is de zijde van de regelmatige vijfhoek.

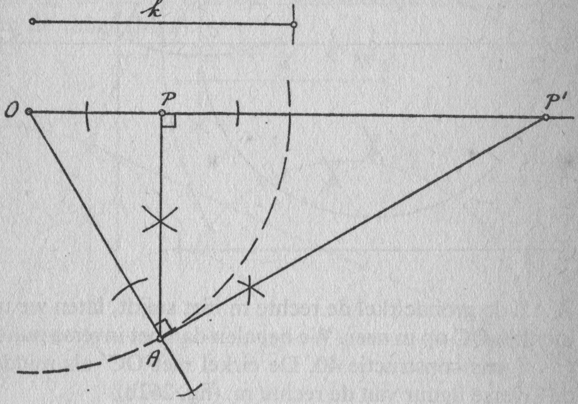
Constructie 40: Construeer het inverse punt van een punt P bij de inversie (O, k^2), als k een gegeven lijnstuk is.

Oplossing: (fig. 261) 1. Teken de rechte door O en P.
2. Construeer de grondcirkel (O, k).
3. Als P binnen de cirkel ligt, richten we in P een loodlijn op de rechte OP op. We vinden A.
4. Construeer nu de raaklijn in A aan de cirkel.
5. We vinden punt P′, het inverse punt van P.

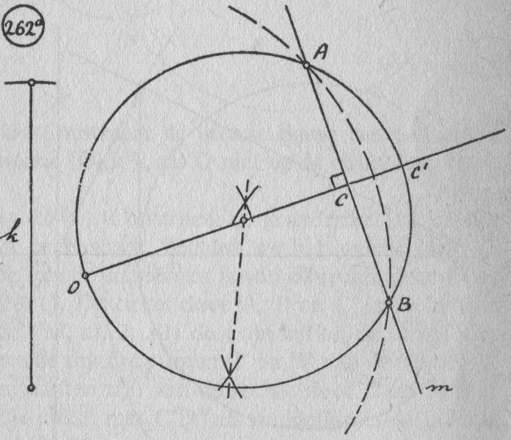
Opmerking: Als P buiten de cirkel ligt, construeren we de

raaklijn uit P aan de cirkel en laten uit het raakpunt een loodlijn neer op de rechte OP. Het voetpunt van de loodlijn is dan het punt P′.

261

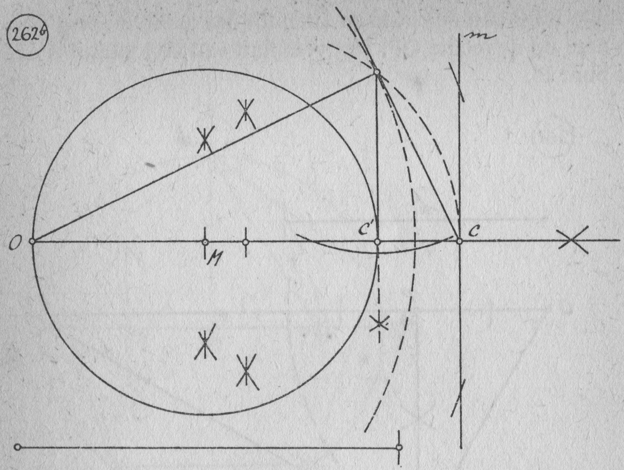


262a

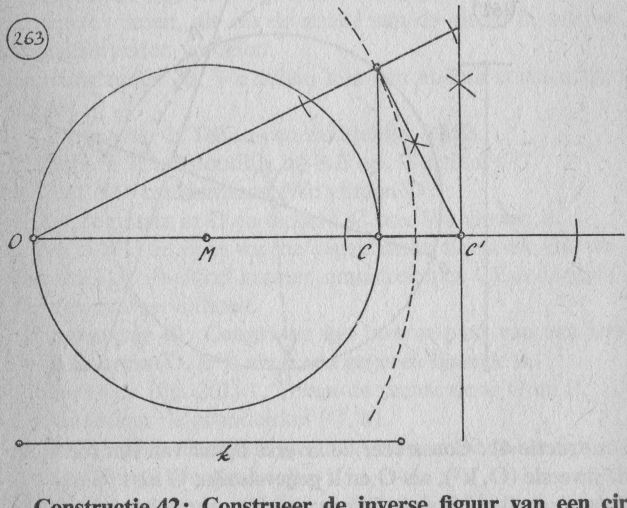


Constructie 41: Construeer de inverse figuur van een rechte m bij de inversie (O, k^2), als O en k gegeven zijn. O niet op m.

Oplossing: (fig. 262a) 1. Construeer de grondcirkel (O, k). 2. Als de grondcirkel de rechte m in A en B snijdt, is de inverse figuur van m een cirkel door O, A en B. (constructie 10)



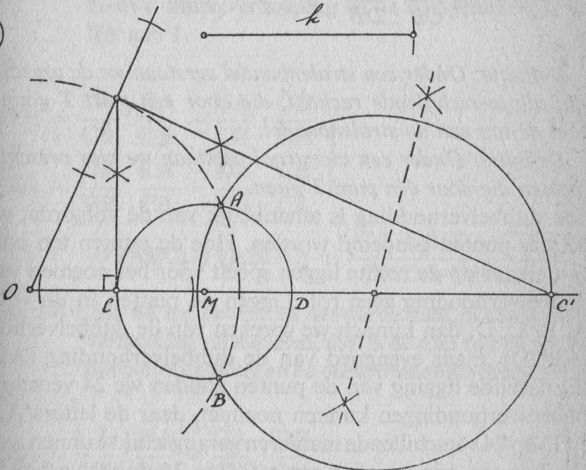
3. Als de grondcirkel de rechte m niet snijdt, laten we uit O de loodlijn OC op m neer. We bepalen dan het inverse punt C′ van C volgens constructie 40. De cirkel met OC′ als middellijn is de inverse figuur van de rechte m. (fig. 262b)



Constructie 42: Construeer de inverse figuur van een cirkel (M, r) bij de inversie (O, k^2), als O op de cirkel ligt. O en k gegeven.

Oplossing: (fig. 263) 1. Construeer de grondcirkel (O, k).
2. Als de grondcirkel de cirkel (M, r) snijdt in A en B, dan is de rechte AB de inverse figuur van cirkel (M, r).
3. Als de grondcirkel de cirkel niet snijdt, dan trekken we de rechte door O en M, die de cirkel nog in C snijdt. We bepalen dan het inverse punt C′ van C (constructie 40) en richten in C′ de loodlijn op de rechte OM op. Deze loodlijn is de inverse figuur van de cirkel (M, r).

264



Constructie 43: Construeer de inverse figuur van een cirkel (M, r) bij de inversie (O, k^2), als O niet op de cirkel ligt. O en k gegeven.

Oplossing: (fig. 264) 1. Construeer de grondcirkel (O, k). Als deze cirkel in A en B snijdt, bepalen we het inverse punt C′ van C, als C één van de snijpunten is van de rechte door O en M met cirkel (M, r). De cirkel door A, B en C′ is de inverse figuur van cirkel (M, r). 2. Als de grondcirkel de cirkel niet snijdt bepalen we de inverse punten C′ en D′ van de punten C en D, die de snijpunten zijn van de rechte door O en M met cirkel (M, r). De cirkel met C′D′ als middellijn is de inverse figuur van cirkel (M, r).

Opmerking: De constructies betreffende inverse figuren berusten op de stellingen uit het hoofdstuk over inversie. Hoewel we bij de meeste constructies aangaven op welke stellingen of definities ze berusten, gaven we niet de bewijzen dat de constructies juist zijn. We laten dat weer aan de lezer over.

XVII. POOL EN POOLLIJN

A. ANHARMONISCHE VERHOUDINGEN

Definitie: Als op een rechte vier verschillende punten A, B, C en D liggen, dan verstaan we onder de dubbelverhouding (ABCD) de verhouding $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$.

Definitie: Onder een stralenbundel verstaan we de verzameling van alle verschillende rechten, die door een punt T gaan en T heet de top van de stralenbundel.

Definitie: Onder een vierstraal verstaan we vier verschillende rechten die door één punt T gaan.

Een dubbelverhouding is afhankelijk van de volgorde, waarin de vier punten genoemd worden. Hoe de punten ten opzichte van elkaar op de rechte liggen speelt voor het noemen van een dubbelverhouding geen rol. Liggen de punten in de volgorde A, B, C, D, dan kunnen we spreken van de dubbelverhouding (ABCD) ,maar evengoed van de dubbelverhouding (ABDC). Bij dezelfde ligging van de punten zouden we 24 verschillende dubbelverhoudingen kunnen noemen, daar de letters A, B, C en D op 24 verschillende manieren gerangschikt kunnen worden. We kunnen ons nu afvragen, of deze 24 dubbelverhoudingen alle dezelfde waarde hebben. Dit is echter niet het geval. Als we de 24 verschillende dubbelverhoudingen uitschrijven, blijken er zes groepen van vier gelijke te zijn als gevolg van de volgende stelling.

Stelling 238: **We mogen twee van de vier punten in een dubbelverhouding verwisselen, mits we de andere twee ook verwisselen.**

Te bew.: (ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).

Bewijs: Als we deze vier dubbelverhoudingen uitschrijven krijgen we:

$$\left.\begin{aligned}(ABCD) &= \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA} \\ (BADC) &= \frac{DB}{DA} : \frac{CB}{CA} = \frac{DB}{DA} \cdot \frac{CA}{CB}\end{aligned}\right\} (1)$$

$$\left.(CDAB) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{CA}{DA} \cdot \frac{DB}{CB}\right\} (2)$$

$$(DCBA) = \frac{BD}{BC} : \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC} \cdot \frac{AC}{AD} = \frac{DB}{CB} \cdot \frac{CA}{DA} \Big\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\right\} \rightarrow (ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

Stelling 239: **Als we het derde en het vierde punt in een dubbelverhouding verwisselen, dan is het produkt van de nieuwe dubbelverhouding en de oorspronkelijke gelijk aan 1.**

Bewijs:

$$\left.\begin{aligned}(ABCD) &= \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA}\\ (ABDC) &= \frac{DA}{DB} : \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \cdot \frac{CB}{CA}\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow (ABCD) \cdot (ABDC) = \frac{CA \cdot DB \cdot DA \cdot CB}{CB \cdot DA \cdot DB \cdot CA} = 1.$$

Stelling 240: **Als we het tweede en het derde punt in een dubbelverhouding verwisselen, dan is de som van de nieuwe dubbelverhouding en de oorspronkelijke gelijk aan 1.**

Bewijs:

$$\left.\begin{aligned}(ABCD) &= \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA}\\ (ACBD) &= \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \cdot \frac{DC}{DA} = \frac{BA}{CB} \cdot \frac{CD}{DA}\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow (ABCD) + (ACBD) =$$

$$= \frac{CA \cdot DB + BA \cdot CD}{CB \cdot DA} = \frac{(CB + BA) \cdot DB + BA \cdot CD}{CB \cdot DA} =$$

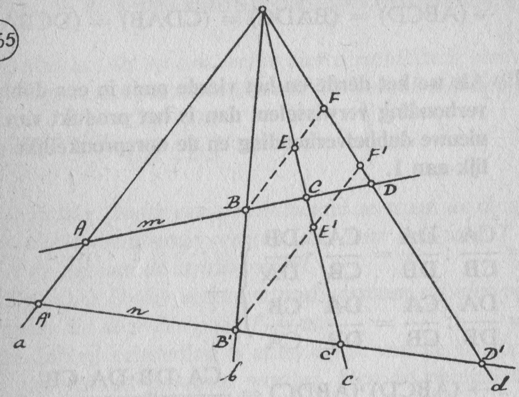
$$= \frac{CB \cdot DB + BA \cdot DB + BA \cdot CD}{CB \cdot DA} = \frac{CB \cdot DB + BA \cdot (DB + CD)}{CB \cdot DA}$$

$$= \frac{CB \cdot DB + BA \cdot CB}{CB \cdot DA} = \frac{CB \cdot (DB + BA)}{CB \cdot DA} = \frac{CB \cdot DA}{CB \cdot DA} = 1.$$

Met behulp van de bovenstaande drie stellingen, kunnen we nu aantonen, dat ieder van de 24 dubbelverhoudingen, behorend bij vier vaste punten op een rechte, één van de volgende zes waarden heeft:

$$k,\quad \frac{1}{k},\quad 1-k,\quad \frac{1}{1-k},\quad \frac{k-1}{k}\quad \text{of}\quad \frac{k}{k-1}.$$

265



Stelling 241: **Als de stralen van een vierstraal gesneden worden door twee verschillende rechten, dan is de dubbelverhouding (ABCD) van de vier snijpunten op de ene rechte gelijk aan de dubbelverhouding (A′B′C′D′) van de vier corresponderende snijpunten op de andere rechte.**

Gegeven: Vierstraal T(a,b,c,d), m en n snijden T(a,b,c,d) in A, B, C, en D, respectievelijk in A′, B′, C′ en D′. (fig. 265)

Te bew.: (ABCD) = (A′B′C′D′).

Bewijs: Trek door B en door B′ rechten evenwijdig aan TA.

$$\left.\begin{array}{l} BE /\!/ AT \rightarrow CA:CB = TA:EB \text{ (st.66)} \\ \\ BF /\!/ AT \rightarrow DB:DA = FB:TA \text{ (st.66)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow CA\cdot DB:CB\cdot DA = TA\cdot FB:TA\cdot EB = \\ \qquad = FB:EB \\ (ABCD) = \dfrac{CA}{CB}:\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{CA\cdot DB}{CB\cdot DA} = \\ \qquad = CA\cdot DB:CB\cdot DA \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow (ABCD) = FB:EB.$$

Evenzo is (A′B′C′D′) = F′B′ : E′B′.

$$FB /\!/ F'B' \rightarrow \left.\begin{array}{l} FB : F'B' = TB : TB' \\ EB : E'B' = TB : TB' \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow FB : F'B' = EB : E'B', \text{ of } FB : EB = F'B' : E'B'.$$

We hebben nu gevonden:

$$\left.\begin{array}{l} (ABCD) = FB : EB \text{ (z.b.)} \\ (A'B'C'D') = F'B' : E'B' \text{ (z.b.)} \\ FB : EB = F'B' : E'B' \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow (ABCD) = (A'B'C'D').$$

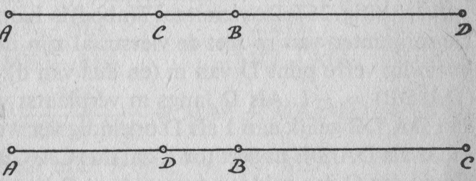
Opmerking: De stelling is bewezen voor het geval, dat iedere twee corresponderende punten aan dezelfde kant van T liggen, maar blijft van kracht als corresponderende punten aan verschillende kanten van T liggen.

We zouden de stelling ook als volgt kunnen formuleren: Een dubbelverhouding is bestand tegen centrale projectie, d.w.z. dat de dubbelverhouding van vier punten gelijk is aan de dubbelverhouding van de centrale projecties van de vier punten op een rechte.

Definitie: Onder de dubbelverhouding van een vierstraal T(a, b, c, d) verstaan we de dubbelverhouding (ABCD) van de snijpunten A, B, C en D van a, b, c en d met een willekeurige snijlijn.

B. HARMONISCHE DUBBELVERHOUDINGEN

(266)

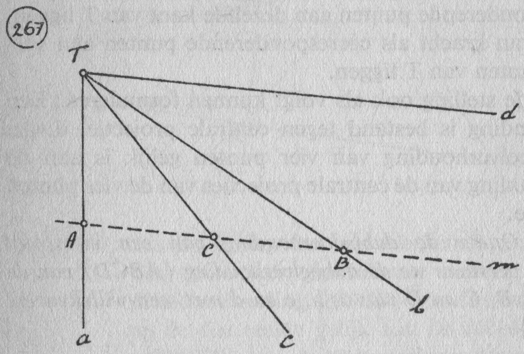


Definitie: Als de dubbelverhouding (ABCD) van vier punten A, B, C en D gelijk is aan −1, dan noemen we die dubbelverhouding harmonisch.

In dit geval kan de volgorde van de punten A, B, C en D op de rechte niet meer geheel willekeurig zijn. Als CA/CB : DA/DB = −1, dan moet één van beide breuken positief en de andere negatief zijn, d.w.z. dat één van de punten C en D tussen A en

B moet liggen en het andere niet, dus bijvoorbeeld zoals te zien is in figuur 266. Een voorbeeld van zo'n *harmonisch puntenviertal* vinden we bij een driehoek, waarin de binnen- en buitenbissectrice van ∠C de basis AB snijden in D en E. De punten A, B, D en E *liggen* dan *harmonisch.* We kunnen ook zeggen, dat indien (ABDE) = −1 de punten A en B door de punten D en E *harmonisch gescheiden* worden of dat de punten A en B *harmonisch toegevoegd* zijn aan de punten D en E.

Definitie: Onder een harmonische vierstraal verstaan we een vierstraal, waarvan de dubbelverhouding harmonisch is.



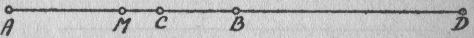
Stelling 242: **Als een rechte evenwijdig is aan één van de stralen van een harmonische vierstraal, dan liggen twee van de snijpunten van die rechte met de andere stralen op gelijke afstand van het derde snijpunt.**

Bewijs: (fig. 267) De vierstraal T(abcd) is harmonisch en m // d. De snijpunten van m met de vierstraal zijn nu A, B, C en het oneindig verre punt D van m (en dus van d). Nu is (CA/CB) : (DA/DB) = −1. Als D langs m verplaatst wordt is de limiet van DA/DB gelijk aan 1 als D oneindig ver weg komt te liggen. Maar als DA/DB nadert tot 1, zal dus CA/CB naderen tot −1, d.w.z. dat C dan midden tussen A en B komt, dus AC = CB.

Opmerking: Ook het omgekeerde van deze stelling geldt: *Als een lijn evenwijdig is aan een straal van een vierstraal en hij snijdt de andere drie stralen zodanig, dan één van de snijpunten midden tussen de beide andere ligt, dan is die vierstraal harmonisch.* Een voorbeeld hiervan: bij de opstaande zijden van een driehoek, die harmonisch toegevoegd zijn aan de zwaartelijn naar de basis en de rechte door de top evenwijdig aan de basis.

Er is nog een andere omkering: *Als een lijn drie stralen van een harmonische vierstraal zodanig snijdt, dat één van de snijpunten midden tussen de twee andere snijpunten ligt, dan is die lijn evenwijdig aan de vierde straal van de vierstraal.*
We kunnen verder nog opmerken, dat iedere harmonische vierstraal op een rechte een harmonisch puntenviertal insnijdt en omgekeerd, dat een harmonisch puntenviertal en een willekeurig punt T een harmonische vierstraal bepalen.

(268)



Stelling 243: **Als de punten A en B door de punten C en D harmonisch gescheiden worden en M is het midden van AB, dan is $MA^2 = MC \cdot MD$.**

Bewijs: (fig. 268) $\dfrac{CA}{CB} : \dfrac{DA}{DB} = -1$, dus $\dfrac{CA}{CB} = -\dfrac{DA}{DB}$.

Nu is:

$$\left.\begin{aligned} CA &= CM + MA = MA - MC \\ CB &= MB - MC = -MA - MC \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{MA - MC}{-MA - MC} = 1 + \frac{2MA}{-MA - MC} \\ &\left.\begin{aligned} DA &= DM + MA = -MD + MA \\ DB &= DM - BM = -MD - MA \end{aligned}\right\} \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{DA}{DB} = \frac{MD - MA}{-MD - MA} = 1 + \frac{2MD}{-MD - MA} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{MA}{MA + MC} = \frac{MD}{MD + MA} \rightarrow MA^2 + MA \cdot MD =$$

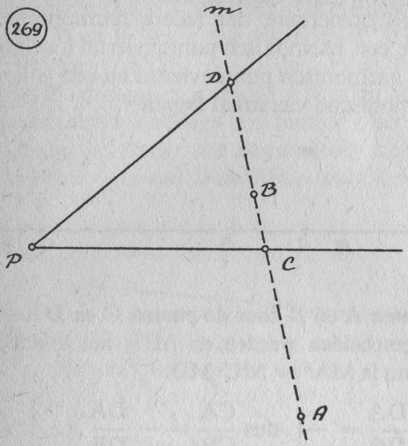
$$= MA \cdot MD + MC \cdot MD \rightarrow MA^2 = MC \cdot MD.$$

C. POOL EN POOLLIJN

Als we door een willekeurig punt A buiten een hoek P een rechte m trekken, die de benen van die hoek in C en D snijdt, dan ligt tussen C en D een punt B zodanig, dat de dubbelverhouding (ABCD) harmonisch is (fig. 269). Laten we nu de rechte m om

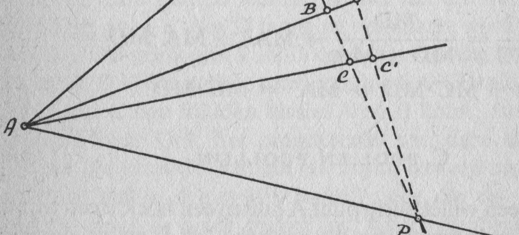
het punt A wentelen, dan verschuiven de punten C en D langs de benen van ∠A. Het punt B zal dan ook een baan beschrijven. Deze baan heet de poollijn van A t.o.v. ∠P.

269



Definitie: Onder de poollijn p van een punt P ten opzichte van ∠A verstaan we de meetkundige plaats van de punten, die harmonisch toegevoegd zijn aan P t.o.v. de snijpunten van een veranderlijke rechte m door P met de benen van ∠A.

270

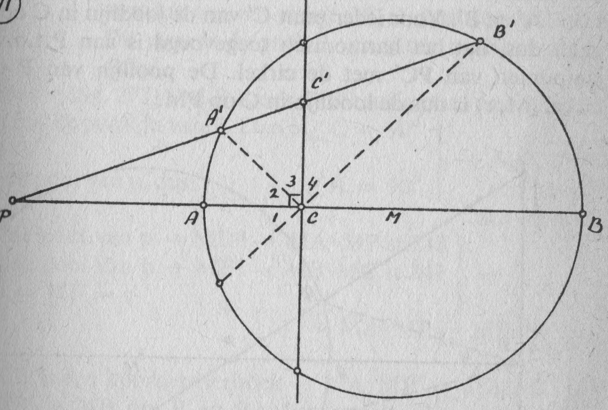


Stelling 244: **Als een punt P binnen of buiten een hoek A ligt, dan is de poollijn van P ten opzichte van hoek A een rechte p door A.**

Bewijs: (fig. 270) Trek de rechte m door P, die de benen van ∠A in C en D snijdt. Stel B is het punt, dat harmonisch toegevoegd is aan P t.o.v. C en D. Trek nu AP en AB. Dan is volgens de definitie A(PBCD) een harmonische vierstraal, dus AB is de straal, die harmonisch toegevoegd is aan AP t.o.v. AC en AD. Stel B′ is een punt van AB. De rechte door P en B′ snijdt de benen van ∠A in C′ en D′. Omdat A(PBCD) een harmonische vierstraal is, vormen P, B′, C′ en D′ een harmonisch puntenviertal. Dus ieder punt B′ van AB is harmonisch toegevoegd aan P t.o.v. de snijpunten C′ en D′ van PB′ met de benen van ∠DAC. Maar dan is AB de poollijn van P t.o.v. ∠A volgens bovenstaande definitie.

Definitie: Onder de poollijn p van een punt P t.o.v. een cirkel (M, r) verstaan we de meetkundige plaats van de punten, die harmonisch toegevoegd zijn aan P t.o.v. de snijpunten van een veranderlijke rechte m door P met de cirkel.

271



Stelling 245: **Als een punt P binnen of buiten een cirkel (M, r) ligt, dan is de poollijn van P ten opzichte van cirkel (M, r) een rechte p, die loodrecht op MP staat.**

Bewijs: (fig. 271) De rechte door P en M snijdt de cirkel in A en B. Stel dat C het punt is, dat harmonisch toegevoegd is aan P ten opzichte van A en B, dan is dus $\frac{AP}{AC} : \frac{BP}{BC} = -1$ of

$\frac{AP}{AC} = -\frac{BP}{BC}$. De punten B en A verdelen PC dus uitwendig en inwendig in dezelfde verhouding. De cirkel met AB als middellijn is dan de meetkundige plaats van de punten, waarvan de afstanden tot P en C zich verhouden als AP : AC.
Trekken we nu een rechte door P die de cirkel in A′ en B′ en de loodlijn in C op PM in C′ snijdt, dan is

$$\left.\begin{array}{l} \text{dus } PA' : CA' = PA : CA \\ \text{en } PB' : CB' = PA : CA \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow PA' : CA' = PB' : CB'$ of $PA' : PB' = CA' : CB'$.

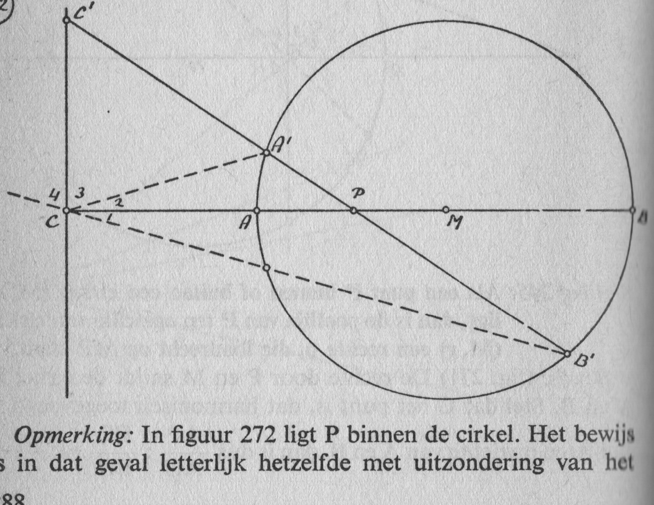
Uit deze laatste betrekking volgt echter, dat PC buitenbissectrice is van $\triangle A'CB'$, dus $\angle C_1 = \angle C_2$ (het omgekeerde van st.138).

Omdat $\angle PCC' = 90°$ is, is CC′ binnenbissectrice van $\triangle A'CB'$, dus $\angle C_3 = \angle C_4 \rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow C'A' : C'B' = CA' : CB' \text{ (st.137)} \\ PA' : PB' = CA' : CB' \text{ (z.b.)} \end{array}\right\} \rightarrow C'A' : C'B' = = PA' : PB'.$$

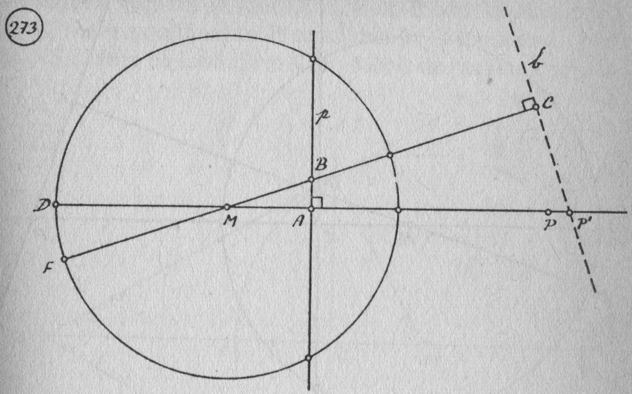
Dit betekent echter dat C′ harmonisch toegevoegd is aan P t.o.v. A′ en B′. Voor ieder punt C′ van de loodlijn in C op PM geldt dus, dat het harmonisch toegevoegd is aan P t.o.v. de snijpunten van PC′ met de cirkel. De poollijn van P t.o.v. cirkel (M, r) is dus de loodlijn in C op PM.

272



Opmerking: In figuur 272 ligt P binnen de cirkel. Het bewijs is in dat geval letterlijk hetzelfde met uitzondering van het

woord 'buitenbissectrice' dat 'bissectrice' moet worden, terwijl de aangehaalde stellingen 137 en 138 verwisseld moeten worden.



Stelling 246: **De poollijnen van alle punten van een rechte p ten opzichte van een cirkel (M, r) gaan door één punt. Dit punt is de pool P van p ten opzichte van die cirkel.**

Bewijs: (fig. 273) Stel B is een willekeurig punt van de rechte p en b is de poollijn van B. Dan is $\angle C = 90°$ }
P is de pool van p, dus $\angle A = 90°$ } → AP'CB is een koordenvierhoek.

P is de pool van p → $MD^2 = MA \cdot MP$ st.243 }
B is de pool van b → $MF^2 = MB \cdot MC$ st.243 } →
$MD = MF = r$ }

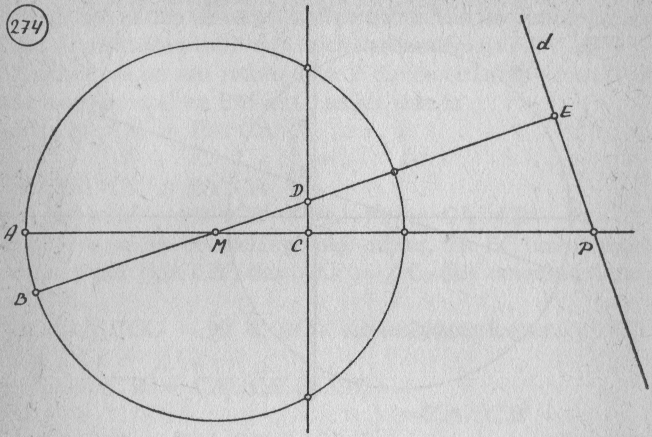
→ $MA \cdot MP = MB \cdot MC$ }
AP'CB is een koordenvierhoek → $MA \cdot MP' = MB \cdot MC$ } →

→ $MP' = MP$, dus P' en P vallen samen. De poollijn b van een willekeurig punt B van p gaat door P en ditzelfde geldt voor alle poollijnen van de punten van p.

Opmerking: Uit figuur 273 en het bovenstaande is te concluderen: Als de poollijn p van P door B gaat, dan gaat de poollijn b van B door P.

Stelling 247: **De polen van alle rechten door een punt P ten opzichte van een cirkel (M, r) liggen op een rechte.**

Deze rechte is de poollijn p van P ten opzichte van de cirkel.



274

Bewijs: (fig. 274) Stel d is een willekeurige rechte door P. De loodlijn ME uit M op d snijdt de poollijn p van P in D. Nu is CPED een koordenvierhoek

$$\left.\begin{array}{l}\text{CPED een koordenvierhoek} \rightarrow MD \cdot ME = MC \cdot MP \\ \text{P is pool van p} \rightarrow MA^2 = MC \cdot MP\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\rightarrow MA^2 = MD \cdot ME \\ MA = MB = r\end{array}\right\} \rightarrow MB^2 = MD \cdot ME \\ \angle E = 90^\circ\end{array}\right\} \rightarrow$$

D is de pool van d.

We zien dus, dat de pool van een willekeurige rechte door P op de poollijn p van P ligt.

Stelling 248: **Als een punt P buiten een cirkel (M, r) ligt, dan is de raakkoorde van P de poollijn van P ten opzichte van cirkel (M, r).**

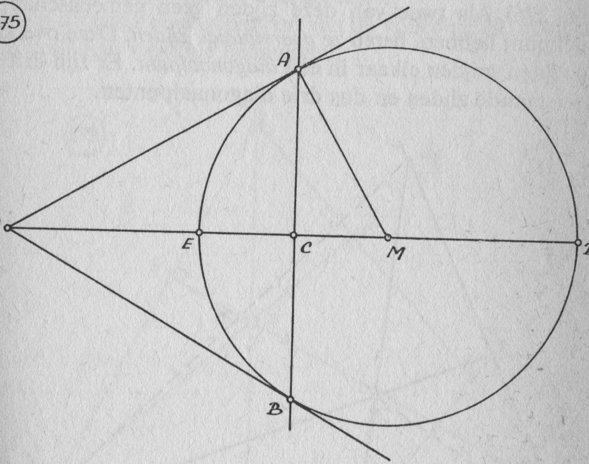
Bewijs: (fig. 275) AP = BP, CP = CP, $\angle APC = \angle CPB$ (st.184). Dus

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ACP \cong \triangle BCP \rightarrow \angle C = 90^\circ \\ \text{PA is raaklijn} \rightarrow \angle MAP = 90^\circ\end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow MA^2 = MC\cdot MP \text{ (st.116)} \\ \\ MA = MD = r \end{array}\right\} \rightarrow MD^2 = MC\cdot MP. \text{ Omdat M}$$

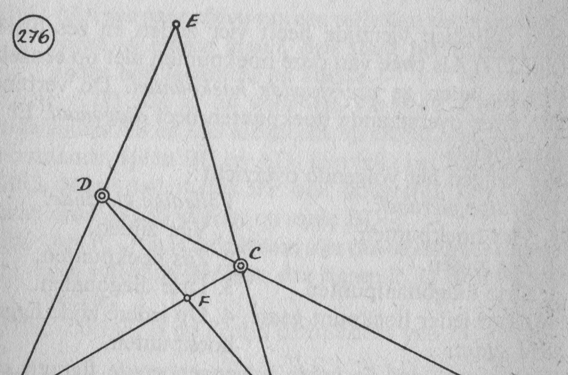
het midden van DE is, zijn D, E, C en P harmonische punten (st.243). De poollijn van P staat dus in C loodrecht op MP (st.245). Maar de loodlijn in C op MP is de raakkoorde van P.

(275)



D. VOLLEDIGE VIERHOEK EN VOLLEDIGE VIERZIJDE

(276)

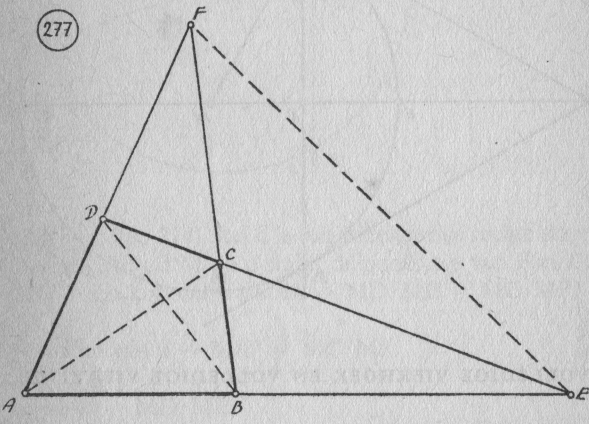


Definitie: Een volledige vierhoek is een figuur gevormd door vier punten waarvan er geen drie op een rechte lijn liggen en al de rechten die door twee van deze punten gaan.

Definitie: Een volledige vierzijde is een figuur gevormd door vier rechten, waarvan er geen twee evenwijdig zijn, en alle punten, die snijpunt zijn van twee van deze rechten.

Een volledige vierhoek heeft dus vier hoekpunten en zes zijden. (fig. 276) Als twee van deze zijden geen gemeenschappelijk hoekpunt hebben, heten ze *overstaande zijden*. Deze overstaande zijden snijden elkaar in een *diagonaalpunt*. Er zijn drie paar overstaande zijden en dus drie diagonaalpunten.

277



Een volledige vierzijde heeft vier zijden en zes hoekpunten. (fig. 277) Als twee van deze hoekpunten niet op eenzelfde zijde liggen, heten ze *overstaande hoekpunten*. De verbindingslijn van twee overstaande hoekpunten heet *diagonaal*. Er zijn drie diagonalen.

We krijgen het volgende overzicht:

Volledige vierhoek:	*Volledige vierzijde:*
1. Vier hoekpunten.	1. Vier zijden.
2. Zes zijden.	2. Zes hoekpunten.
3. Drie diagonaalpunten.	3. Drie diagonalen.
4. Door ieder hoekpunt gaan drie zijden	4. Op iedere zijde liggen drie hoekpunten.

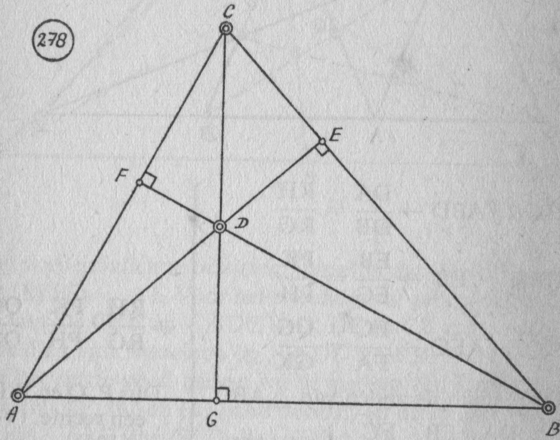
We zeggen, dat de beide bovengenoemde figuren *duaal aan elkaar toegevoegd* zijn. Dit is het geval als aan de volgende voorwaarden voldaan is:

1. Een punt staat duaal tegenover een rechte lijn en omgekeerd.
2. 'Collineair' staat duaal tegenover 'concurrent zijn'.
3. Ieder element uit de ene figuur correspondeert met juist één element uit de andere figuur en omgekeerd.

In de projectieve meetkunde kunnen we vaak volgens bovenstaande voorwaarden uit een stelling een andere stelling afleiden, die duaal toegevoegd is aan de eerste.

We zullen nu enige eigenschappen van de volledige vierhoek en van de volledige vierzijde behandelen.

(278)



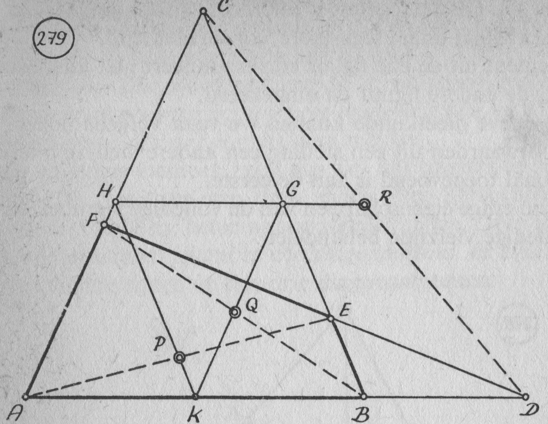
Stelling 249: **Als twee paar zijden van een volledige vierhoek loodrecht op elkaar staan, dan staat het derde paar zijden ook loodrecht op elkaar.**

Bewijs: (fig. 278) Als in de volledige vierhoek ABCD de overstaande zijden AB en CD loodrecht op elkaar staan, evenals de overstaande zijden BC en AD, dan is D het hoogtepunt van △ABC. Maar dan is dus BF ook hoogtelijn in △ABC en dus staat zijde AC loodrecht op zijde BD.

Stelling 250: **Als P, Q en R de middens zijn van de diagonalen van een volledige vierzijde, dan liggen P, Q en R op een rechte.**

Bewijs: (fig. 279) G, H en K zijn de middens van BC, AC en AB, dus:

GH // AB (st.61) en ook GR // BD (st.61), dus HG gaat door R.
HK // BC (st.61) en ook HP // CE (st.61), dus HK gaat door P.
GK // AC (st.61) en ook GQ // CF (st.61), dus GK gaat door Q.



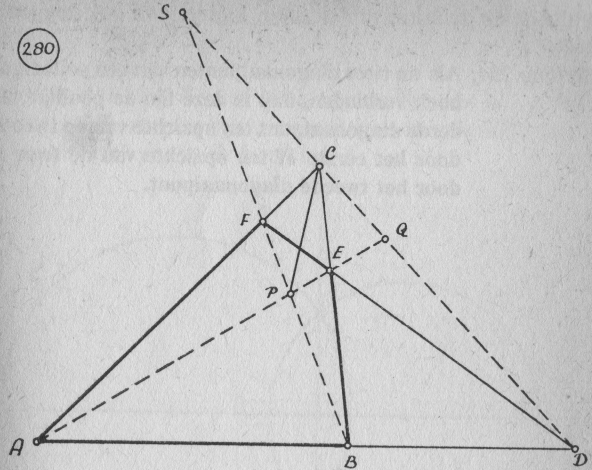
$$\left.\begin{array}{l}
HGR \parallel ABD \rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{RH}{RG} \\[2ex]
HPK \parallel CEB \rightarrow \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{PK}{PH} \\[2ex]
KQG \parallel AFC \rightarrow \dfrac{FC}{FA} = \dfrac{QG}{GK} \\[2ex]
\text{DEF snijdt de zijden van } \triangle ABC \\
\text{dus } \dfrac{DA}{DB} \cdot \dfrac{EB}{EC} \cdot \dfrac{FC}{FA} = 1 \text{ (st.130)}
\end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{RH}{RG} \cdot \dfrac{PK}{PH} \cdot \dfrac{QG}{QK} = 1.$$

Dus P, Q en R liggen op een rechte. (Volgens st.131).

Stelling 251: **Als P en Q de snijpunten zijn van een diagonaal van een volledige vierzijde met de beide andere diagonalen, dan zijn P en Q harmonisch toegevoegd aan de twee hoekpunten op die diagonaal.**

Bewijs: (fig. 280) We moeten dus bewijzen, dat P en Q de hoekpunten A en E harmonisch scheiden. We passen op △AEF de *stelling van De Ceva* toe. De rechten AD, FP en EC gaan door B en snijden de zijden van △AEF in D, P en C. Bovendien passen we op △AEF de *stelling van Menelaos* toe met DQC als snijlijn. We krijgen dan:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{PA}{PE} \cdot \dfrac{CF}{CA} \cdot \dfrac{DE}{DF} = -1 \\[2ex]
\dfrac{QA}{QE} \cdot \dfrac{CF}{CA} \cdot \dfrac{DE}{DF} = 1
\end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{PA}{PE} = -\dfrac{QA}{QE}, \text{ dus } (AEPQ) = -1.$$



Er zijn nog twee gevallen te bewijzen, namelijk dat (DCQS) = −1 en dat (BFPS) = −1. Voor het tweede geval gebruiken we de stelling van De Ceva op △ADC (AQ, DF en CB gaan door E) en de stelling van Menelaos op △ADC (met BFS als snijlijn). Voor het derde geval passen we de stelling van De Ceva toe op △ABF (AP, BC en FD gaan door E) en de stelling van Menelaos op △ABF (met SCD als snijlijn).

Opmerking: Uit het feit dat (AEPQ) = −1 volgt de volgende stelling:

Stelling 252: **Als twee zijden van een volledige vierzijde elkaar in A snijden, dan vormen deze twee zijden met de diagonaal door A en met de verbindingslijn van A met het snijpunt van de twee andere diagonalen een harmonische vierstraal.**

Dus A(BFPS) is een harmonische vierstraal evenals F(AEPQ), B(AEPQ), D(AEPQ), C(AEPQ) en E(DCQS).

Opmerking: Beschouwen we ABEF als een volledige vierhoek, dan hebben we de volgende stelling:

Stelling 253: **Als we twee diagonaalpunten van een volledige vierhoek verbinden met het derde diagonaalpunt, dan vormen deze twee verbindingslijnen met de twee zijden door het derde diagonaalpunt een harmonische vierstraal.**

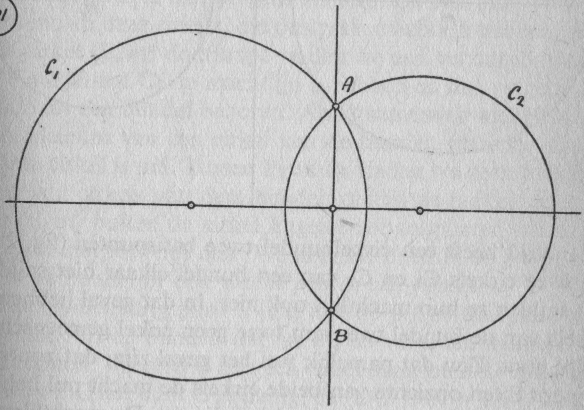
Volgens de definitie van poollijn kunnen we ook zeggen: (fig. 280)

Stelling 254: **Als we twee diagonaalpunten van een volledige vierhoek verbinden, dan is deze lijn de poollijn van het derde diagonaalpunt ten opzichte van de twee zijden door het eerste òf ten opzichte van de twee zijden door het tweede diagonaalpunt.**

XVIII. CIRKELBUNDELS

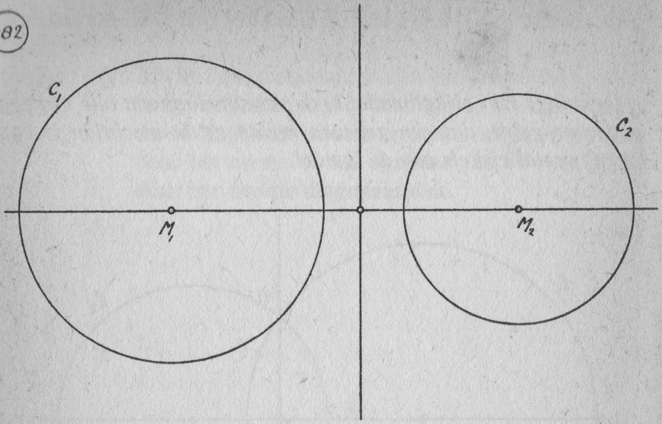
Definitie: Een cirkelbundel is de verzameling van alle cirkels, waarvoor geldt, dat een gegeven rechte m de machtlijn is van ieder tweetal cirkels van de bundel.

281



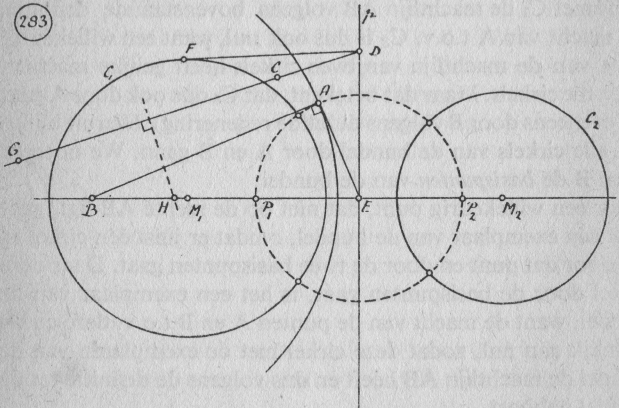
Als twee cirkels C_1 en C_2 van een bundel elkaar snijden in A en B (fig. 281), dan is de rechte AB de machtlijn van die twee cirkels. Het punt A (en ook het punt B) heeft de macht nul t.o.v. C_1 en C_2. Een willekeurig exemplaar C_3 van de bundel heeft met C_1 de machtlijn AB volgens bovenstaande definitie. De macht van A t.o.v. C_3 is dus ook nul, want een willekeurig punt van de machtlijn van twee cirkels heeft gelijke machten t.o.v. die cirkels. Maar dat betekent, dat C_3 dus ook door A gaat (en eveneens door B volgens dezelfde redenering). Hieruit blijkt, dat alle cirkels van de bundel door A en B gaan. We noemen A en B de *basispunten* van de bundel.
Door een willekeurig punt, dat niet op de rechte AB ligt, gaat juist één exemplaar van de bundel, omdat er juist één cirkel is, die door dat punt en door de twee basispunten gaat. Daar deze cirkel door de basispunten gaat, is het een exemplaar van de bundel, want de macht van de punten A en B t.o.v. deze cirkel is gelijk aan nul, zodat deze cirkel met de exemplaren van de bundel de machtlijn AB heeft en dus volgens de definitie tot de bundel behoort.

282



Niet altijd heeft een cirkelbundel twee basispunten (fig. 282). Als twee cirkels C_1 en C_2 van een bundel elkaar niet snijden, dan snijden ze hun machtlijn ook niet. In dat geval hebben de cirkels van de bundel twee aan twee geen enkel gemeenschappelijk punt. Zou dat namelijk wel het geval zijn, dat zou zo'n snijpunt S ten opzichte van beide cirkels de macht nul hebben en dus op de machtlijn van de cirkels liggen. De machtlijn zou die cirkels dus snijden en in S en dus alle exemplaren van de bundel snijden in S, zoals we reeds gezien hebben. Maar dat is in strijd met ons uitgangspunt, dat de cirkels C_1 en C_2 geen gemeenschappelijk punt, dus ook geen snijpunt S hebben.

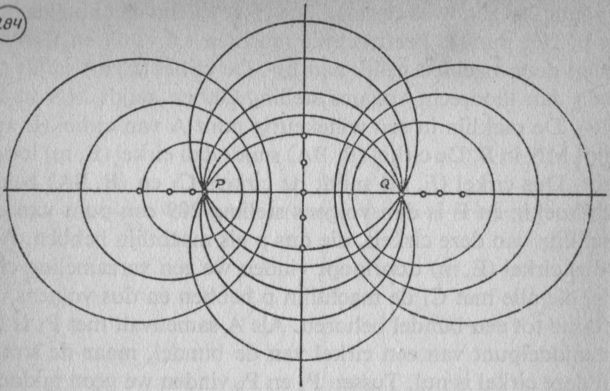
283



In figuur 283 zijn twee cirkels C_1 en C_2 getekend met hun machtlijn p. Het punt E heeft gelijke machten t.o.v. C_1 en C_2. We stellen deze machten gelijk aan m^2. De cirkel (E, m) snijdt C_1 en C_2 dan loodrecht volgens stelling 209 en snijdt MN in P_1 en P_2. De raaklijn in een willekeurig punt A van cirkel (E, m) snijdt MN in B. De cirkel (B, BA) snijdt dan cirkel (E, m) loodrecht. Dus cirkel (E, m) snijdt de cirkels C_1 en (B, BA) beide rechthoekig en E is dan volgens stelling 209 een punt van de machtlijn van deze cirkels, die dus p als machtlijn hebben. Als A dus cirkel (E, m) doorloopt vinden we een verzameling cirkels, die alle met C_1 de machtlijn p hebben en dus volgens de definitie tot een bundel behoren. Als A samenvalt met P_1 is P_1 het middelpunt van een cirkel van de bundel, maar de straal van deze cirkel is nul. Tussen P_1 en P_2 vinden we geen middelpunten van cirkels van deze bundel, omdat de raaklijnen aan cirkel (E, m) buiten de cirkel liggen en de snijpunten van deze raaklijnen met MN dus ook. We noemen P_1 en P_2 de *grenspunten* van de bundel of ook wel *de punten van Poncelet*.
Door een willekeurig punt C (dat niet op p ligt) gaat juist één exemplaar van de bundel, dat we op de volgende manier bepalen kunnen: Verbind C met een willekeurig punt D van p en bepaal op DC het punt G zodanig, dat $DC \cdot DG = DF^2$, waarbij DF het raaklijnstuk van de raaklijn uit D aan C_1 is. De middelloodlijn van CG snijdt MN in H. Cirkel (H, HC) is dan het exemplaar van de bundel, dat door C gaat.
Van een cirkelbundel kunnen we dus zeggen, dat het een verzameling van cirkels is, zodanig, dat voor elk punt van het vlak geldt, dat er één exemplaar van de bundel doorgaat, òf dat alle exemplaren van de bundel er doorheen gaan. In dit laatste geval spreken we van een basispunt van de bundel. Wel moeten we de machtlijn van de bundel in combinatie met de oneindig verre rechte van het vlak dan als een ontaard exemplaar van de bundel beschouwen. We noemen een cirkelverzameling, die aan de laatstgenoemde voorwaarden voldoet wel een enkelvoudig oneindig lineair stelsel van cirkels.
Bij een gegeven lijnstuk PQ behoren twee cirkelbundels:
1. De bundel, die P en Q als basispunten heeft.
2. De bundel, die de middelloodlijn van PQ als machtlijn en de punten P en Q zelf als grenspunten heeft. Het noemen van de machtlijn is hier niet noodzakelijk, daar de bundel door de twee grenspunten al bepaald is.

We noemen deze twee bundels *orthogonale cirkelbundels*, want

(284)

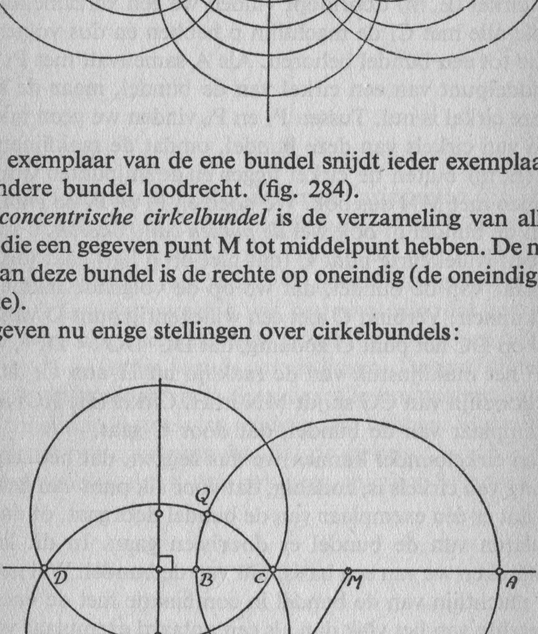


ieder exemplaar van de ene bundel snijdt ieder exemplaar van de andere bundel loodrecht. (fig. 284).

Een *concentrische cirkelbundel* is de verzameling van alle cirkels, die een gegeven punt M tot middelpunt hebben. De machtlijn van deze bundel is de rechte op oneindig (de oneindig verre rechte).

We geven nu enige stellingen over cirkelbundels:

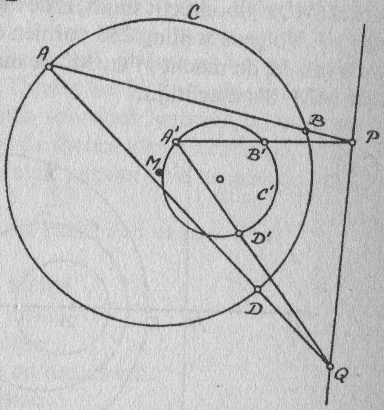
(285)



Stelling 255: **Als de punten A, B, C en D harmonisch liggen, dan zal de cirkel met AB als middellijn iedere cirkel van de bundel, die C en D als basispunten heeft, loodrecht snijden.**

Bewijs: (fig. 285) Volgens stelling 243 is $MA^2 = MC \cdot MD$, omdat M het midden van AB is. Als nu C_1 een willekeurig exemplaar van de bundel is en C_1 snijdt (M, MA) in P en Q, dan is $MP^2 = MC \cdot MD$, omdat MP = MA. Maar dat betekent dat MP cirkel C_1 raakt in P en dus ook dat C_1 cirkel (M, MA) loodrecht snijdt.

286



Stelling 256: **Als P en Q gegeven punten zijn, dan vormen alle cirkels waarvoor geldt, dat de machten van P en Q ten opzichte van deze cirkels gelijk zijn aan m^2 en n^2, een bundel met PQ als machtlijn.**

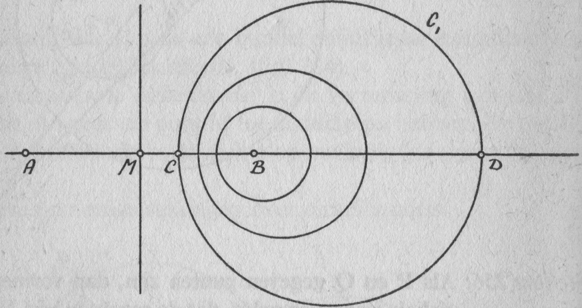
Bewijs: (fig. 286) Neem een willekeurig punt A, dat niet op de rechte PQ ligt en bepaal op PA het punt B zodanig, dat $PA \cdot PB = m^2$. Bepaal op QA het punt D zodanig, dat $QA \cdot QD = n^2$. Door de punten A, B en D wordt nu een cirkel C bepaald. Nemen we nu een willekeurig punt A′, dat niet met A samenvalt en ook niet op de rechte PQ ligt, dan kunnen we de punten B′ en D′ bepalen, zodanig dat $PA' \cdot PB' = m^2$ en $QA' \cdot QD' = n^2$. A′, B′ en D′ bepalen dan een cirkel C′. Omdat $PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = m^2$ is, is P een punt van de machtlijn van C en C′. Hetzelfde geldt voor Q, dus PQ is de machtlijn van C en C,′ Omdat A′ een willekeurig punt was, is dus PQ de machtlijn van C en iedere cirkel, die volgens bovenstaande manier te bepalen is bij ieder willekeurig punt A′. Als deze cirkels met cirkel C dezelfde machtlijn hebben, dan vormen ze volgens de definitie een cirkelbundel. Omgekeerd geldt, zoals gemakkelijk

is in te zien, voor ieder exemplaar van de bundel, dat de machten van P en Q t.o.v. dat exemplaar gelijk zijn aan m^2 en n^2.

Stelling 257: **Als (M, r) en (M′, r′) twee gegeven cirkels zijn, dan vormen alle cirkels, die de twee gegeven cirkels loodrecht snijden, een bundel, waarvan MM′ de machtlijn is.**

Bewijs: Als C een cirkel is, die die cirkel (M, r) loodrecht snijdt, dan is de macht van M t.o.v. C gelijk aan r^2. Als C de cirkel (M′, r′) loodrecht snijdt, is de macht van M′ t.o.v. C gelijk aan r'^2. Volgens stelling 256 vormen al de cirkels, ten opzichte waarvan M de macht r^2 en M′ de macht r'^2 heeft, een bundel met MM′ als machtlijn.

287



Stelling 258: **Als AB een gegeven lijnstuk is en p : q een veranderlijke verhouding, dan vormen alle cirkels van Apollonius voor lijnstuk AB bij een verhouding p : q een bundel.**

Bewijs: (fig. 287) Al de cirkels van Apollonius van lijnstuk AB hebben hun middelpunt op de rechte AB. Als C_1 zo'n cirkel is, dan zijn de punten C en D harmonisch toegevoegd aan A en B, want bij een cirkel van Apollonius hebben we: CA : CB = −DA : DB. Als M het midden van AB is, is $MA^2 = MC \cdot MD$. De macht van M t.o.v. iedere cirkel van Apollonius is dus MA^2, dus M is een punt van de machtlijn van elk tweetal cirkels van Apollonius. Daar al deze machtlijnen loodrecht op de bijbehorende centraal staan, dus loodrecht op de rechte AB, vallen ze samen met de middelloodlijn van AB. Al de cirkels van Apollonius van lijnstuk AB vormen dus een cirkelbundel met de middelloodlijn van AB als machtlijn.

XIX. HET RAAKPROBLEEM VAN APOLLONIUS

De vraag of het mogelijk is een cirkel te construeren, die aan drie gegeven willekeurige cirkels raakt, staat bekend onder de naam: *Raakprobleem van Apollonius*.

Op zichzelf zou dit probleem misschien niet voldoende zijn, om er een apart hoofdstukje aan te wijden. Door echter een rechte lijn op te vatten als een cirkel en een punt eveneens (dus als een cirkel met straal nul), ondergaat het probleem een aanzienlijke uitbreiding. Omdat we bij het oplossen van de verschillende gevallen, die zich voordoen, gebruik kunnen maken van diverse gedeelten uit de theorie der planimetrie, zullen we al de gevallen stuk voor stuk nagaan. We krijgen de volgende gevallen te behandelen:

Construeer de cirkel(s), die raakt aan of gaat door:

1. Drie punten.
2. Twee punten en een rechte.
3. Twee punten en een cirkel.
4. Een punt en twee rechten.
5. Een punt, een rechte en een cirkel.
6. Een punt en twee cirkels.
7. Drie rechten.
8. Twee rechten en een cirkel.
9. Een rechte en twee cirkels.
10. Drie cirkels.

Hebben we het tiende geval opgelost, dan zijn in principe ook de andere negen gevallen opgelost. In veel gevallen bestaat er echter een onafhankelijke oplossing van een bepaald geval, die dus niet uit die van het tiende geval is afgeleid.

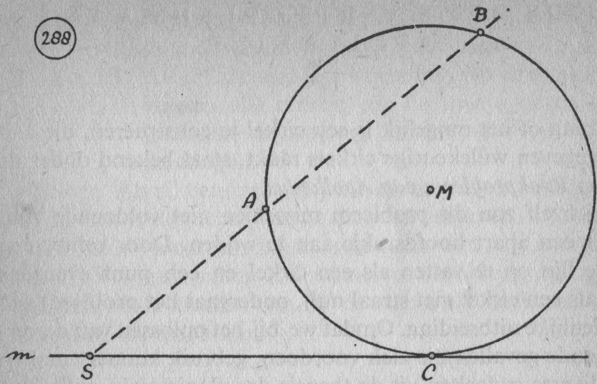
Geval 1: Punt, punt, punt.

De oplossing vinden we in constructie 10 in hoofdstuk XVII. De gevraagde cirkel is namelijk de omgeschreven cirkel van de driehoek, die de drie gegeven punten tot hoekpunten heeft. Als de punten niet op een rechte liggen is er juist één oplossing.

Geval 2: Punt, punt, rechte. (fig. 288)

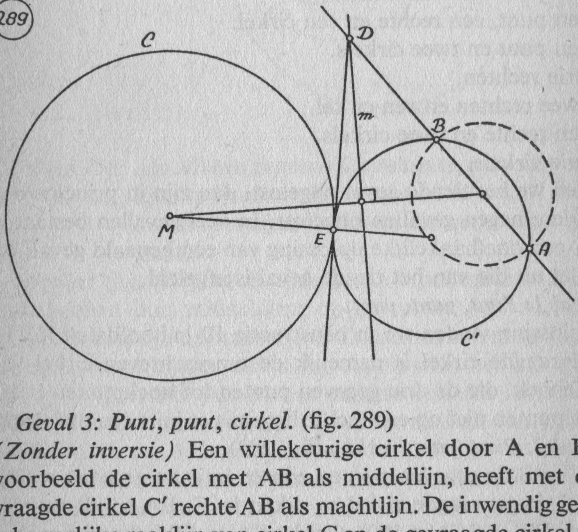
Als A en B de gegeven punten zijn en m is de gegeven rechte, dan zal de gevraagde cirkel m raken in C. BA snijdt m in S, dus $SA \cdot SB = SC^2$ (st.169). Omdat SA en SB bekend zijn, kan SC geconstrueerd worden volgens constructie 23, want $SC = \sqrt{SA \cdot SB}$. Als SC bekend is, kan ook punt C op m bepaald wor-

288



den. Het middelpunt van de gevraagde cirkel ligt op de middelloodlijn van AB en op de loodlijn in C op m, en kan dus geconstrueerd worden.
Omdat we aan weerskanten van S een punt C op m kunnen bepalen, zijn er in het algemeen twee oplossingen.

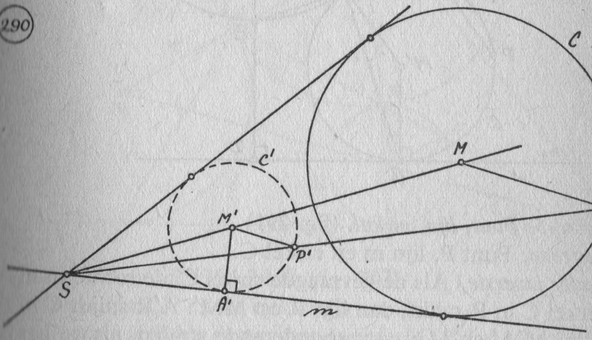
289



Geval 3: Punt, punt, cirkel. (fig. 289)
(Zonder inversie) Een willekeurige cirkel door A en B, bijvoorbeeld de cirkel met AB als middellijn, heeft met de gevraagde cirkel C′ rechte AB als machtlijn. De inwendig gemeenschappelijke raaklijn van cirkel C en de gevraagde cirkel is ook machtlijn van deze twee cirkels en snijdt AB in D. Dus D is het machtpunt van de drie cirkels. D is te bepalen als het snij-

punt van rechte AB met de te construeren machtlijn m van cirkel C en de cirkel met middellijn AB. De raaklijn uit D aan cirkel C heeft het raakpunt E dat we bepalen kunnen. Het middelpunt van de gevraagde cirkel ligt op de middelloodlijn van AB en op de rechte ME en kan dus geconstrueerd worden.
(Met inversie) We inverteren de gevraagde cirkel C′ vanuit A. Als macht van inversie nemen we de macht van A t.o.v. cirkel C. Cirkel C gaat dus in zichzelf over. B gaat over in B′. C′ gaat over in de rechte c′, omdat het centrum van de inversie op de cirkel ligt. Rechte c′ moet nu raken aan C en door B′ gaan. c′ is te construeren als de raaklijn uit B′ aan cirkel C. Daarna bepalen we de cirkel C′, waarvan c′ de inverse figuur is, door op c′ de eerdergenoemde inversie toe te passen, aangezien de inversie een involutorische transformatie is. (Zie hoofdstuk XVI.) Omdat er ten hoogste twee raaklijnen door B′ aan cirkel C te construeren zijn, krijgen we hoogstens twee oplossingen.

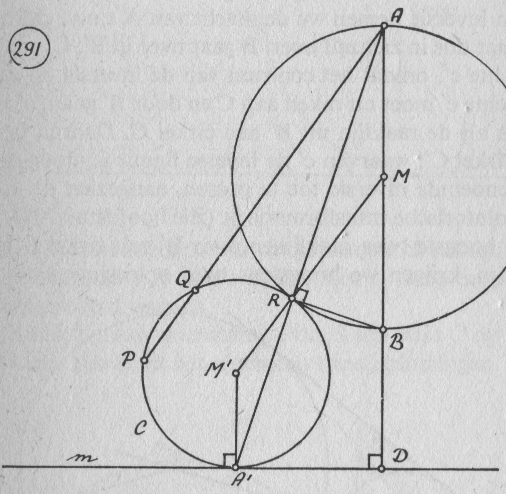
(290)



Geval 4: Punt, lijn, lijn. (fig. 290)
Dit geval kunnen we oplossen door middel van vermenigvuldiging van figuren. Het middelpunt van de gevraagde cirkel C ligt op één van de bissectrices van de hoeken, die door de gegeven rechten m en n gevormd worden. Omdat punt P slechts binnen één van deze vier hoeken ligt, is alleen de bissectrice van de betreffende hoek van belang. We construeren nu een cirkel C′, die m en n raakt door uit een willekeurig punt M′ van de bissectrice een loodlijn M′A′ op m neer te laten. Cirkel (M′, M′A′) raakt dan aan m en n. We vermenigvuldigen deze cirkel vanuit het snijpunt S van m en n. Het punt P′ van cirkel (M′, M′A′), dat met P correspondeert, vinden we als snijpunt van PS met cirkel (M′, M′A′). M′P′ en MP zijn corresponde-

rende stralen en dus evenwijdig met elkaar. We kunnen nu punt M vinden, als we door P een rechte construeren evenwijdig met M'P'. Deze rechte snijdt de bissectrice in M. Cirkel (M, MP) is de gevraagde cirkel. Omdat we twee punten P' kunnen bepalen, zijn er in het algemeen twee oplossingen.

291



Geval 5: Punt, lijn, cirkel. (fig. 291)

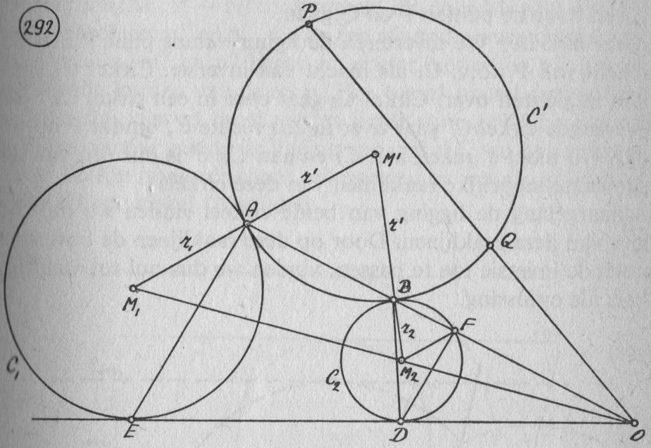
Gegeven: Punt P, lijn m en cirkel C.

(Zonder inversie) Als de gevraagde cirkel C' de rechte m in A' en cirkel C in R raakt, dan ligt R op MM'. A'R snijdt C in A. Nu zijn M'A' en MA corresponderende stralen, als we het inwendig gelijkvormigheids punt R als centrum van vermenigvuldiging beschouwen. Dus M'A' // MA. Maar dan staat MA loodrecht op m in het punt D. BR staat loodrecht op AA', omdat AB middellijn van cirkel C is. Omdat $\angle D = \angle BRA = 90°$ is, is DBRA' een koordenvierhoek, dus $AB \cdot AD = AR \cdot AA'$. (st.168) Bovendien is $AR \cdot AA' = AQ \cdot AP$ (st.168), dus $AB \cdot AD = AQ \cdot AP$. De lijnstukken AB, AD en AP zijn bekend, dus AQ kan geconstrueerd worden volgens constructie 21 en met behulp daarvan is het punt Q te bepalen. De gevraagde cirkel C' moet nu raken aan m en door de punten P en Q gaan. Deze cirkel is nu te construeren volgens geval 2 van dit hoofdstuk.

(Met inversie) We inverteren de figuur met P als centrum en de

macht van P t.o.v. cirkel C als macht van inversie. Cirkel C gaat dan in zichzelf over. Rechte m gaat over in een cirkel C″, die door P gaat. De gevraagde cirkel C′ gaat over in een rechte c′ omdat P op C′ ligt. De rechte c′ moet raken aan de cirkels C en C″. Hiervoor vinden we de gemeenschappelijke raaklijnen van beide cirkels. Alnaargelang de onderlinge ligging van de cirkels C en C″ vinden we nul tot vier van deze raaklijnen. Door deze te inverteren volgens bovengenoemde inversie krijgen we dan nul tot vier cirkels als oplossing.

(292)



Geval 6: Punt, cirkel, cirkel. (fig. 292)

Gegeven: Punt P en de cirkels C_1 en C_2.

(Zonder inversie) Als de gevraagde cirkel C′ de gegeven cirkels C_1 en C_2 in A en B raakt, dan snijdt AB de rechte M_1M_2 in het uitwendig gelijkvormigheidspunt O. We kunnen dit bewijzen met stelling 129:

$$\frac{AM'}{AM_1}\cdot\frac{OM_1}{OM_2}\cdot\frac{BM_2}{BM'}=\frac{r'}{r_1}\cdot\frac{OM_1}{OM_2}\cdot\frac{r_2}{r'}=\frac{r'}{r_1}\cdot\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r'}=1,$$

want $OM_1 : OM_2 = r_1 : r_2$. Hieruit volgt, dat A, B en O op een rechte liggen. Trek nu de gemeenschappleijke raaklijn ODE. A en F zijn corresponderende punten evenals E en D. Dus bg AE = bg FD.

$\angle E = \frac{1}{2}$ bg AE en $\angle DBF = \frac{1}{2}$ bg FD, dus $\angle E = \angle DBF$ } →

Bovendien is $\angle BOD = \angle EOA$ }

$\rightarrow \triangle BOD \sim \triangle EOA \rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow OB:OE = OD:OA \rightarrow OA\cdot OB = OD\cdot OE \\ \text{OP snijdt } C' \text{ nog in } Q \rightarrow OA\cdot OB = OP\cdot OQ\end{array}\right\} \rightarrow$$

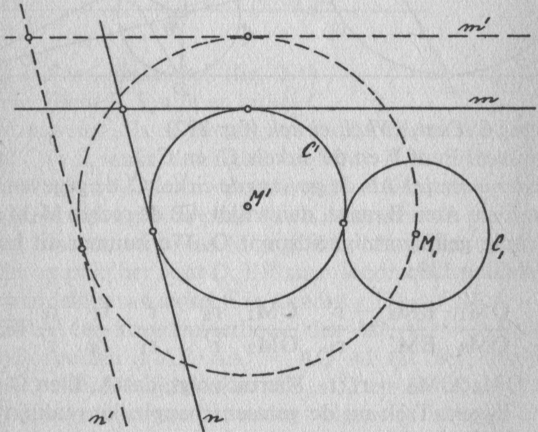
$$\rightarrow OD\cdot OE = OP\cdot OQ.$$

Van deze lijnstukken zijn OD, OE en OP bekend en kan OQ geconstrueerd worden volgens constructie 21. Met behulp van OQ vinden we punt Q. Cirkel C′ is nu te construeren volgens geval 3 van dit hoofdstuk, want C′ moet raken aan cirkel C_1 en door de punten P en Q gaan.

(Met inversie) We inverteren de figuur vanuit punt P met de macht van P t.o.v. C_1 als macht van inversie. Cirkel C_1 gaat dan in zichzelf over. Cirkel C_2 gaat over in een cirkel C_2'. De gevraagde cirkel C′ gaat over in een rechte c′, omdat P op C′ ligt. Nu moet c′ raken aan C_1 en aan C_2. c′ is dus één van de gemeenschappelijke raaklijnen van deze cirkels.

Alnaargelang de ligging van beide cirkels vinden we nul tot vier van deze raaklijnen. Door op deze raaklijnen de bovengenoemde inversie toe te passen, vinden we dus nul tot vier cirkels als oplossing.

(293)



Geval 7: Lijn, lijn, lijn.

Dit geval is reeds opgelost in de constructies 11 en 12 van hoofdstuk XVII. De cirkels, die aan het gevraagde zullen voldoen zijn ingeschreven en de drie aangeschreven cirkels van

de driehoek die gevormd wordt door de drie gegeven lijnen.

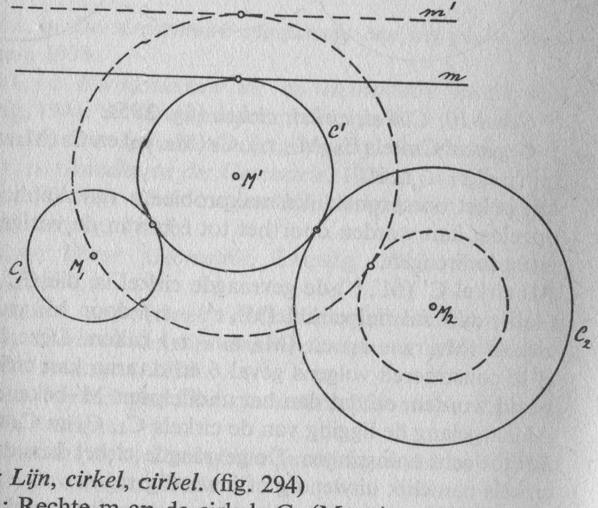
Geval 8: Lijn, lijn, cirkel. (fig. 293)

Gegeven: Cirkel C_1 (M_1, r_1) en de rechten m en n.

Als cirkel C′ (M′, r′) de gevraagde cirkel is, dan zal cirkel (M′, r′ + r_1) door M_1 gaan en raken aan de rechten m′ en n′, die op een afstand r_1 evenwijdig lopen aan m en n. Het construeren van cirkel (M′, r′ + r_1) is volgens geval 4 uit te voeren en daarna kan de gevraagde cirkel (M′, r′) geconstrueerd worden.

In figuur 293 krijgen we volgens geval 4 twee oplossingen, maar er zijn nog twee oplossingen te vinden als we als hulpcirkel eerst cirkel (M′, r′ − r_1) construeren, die door M_1 gaat en raakt aan de rechten m″ en n″, die op een afstand r_1 evenwijdig lopen aan m en n. m″ en n″ liggen nu echter met m′ en n′ aan verschillende kanten van m en n. Het totaal aantal oplossingen is hier dus vier en moet verder geval voor geval beoordeeld worden al naar gelang de ligging van cirkel C_1 en de rechten m en n. Er zijn hoogstens acht oplossingen en wel als m en n elkaar binnen cirkel C_1 snijden.

(294)

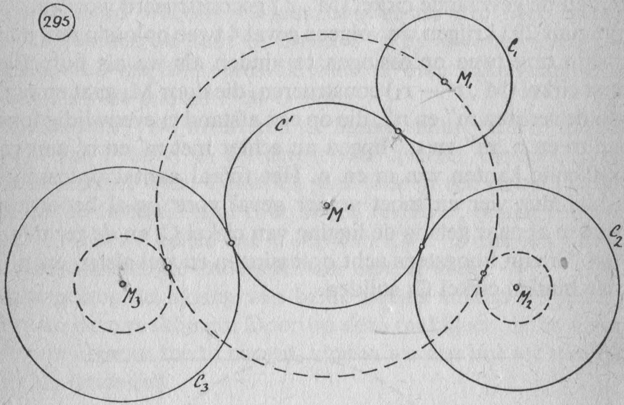


Geval 9: Lijn, cirkel, cirkel. (fig. 294)

Gegeven: Rechte m en de cirkels C_1 (M_1, r_1) en C_2 (M_2, r_2) $r_1 \leqslant r_2$.

Als de gevraagde cirkel C′ (M′, r′) aan m, C_1 en C_2 raakt, dan zal de cirkel (M′, r′ + r_1) door M_1 gaan en raken aan de cirkel $(M_2, r_2 - r_1)$ en aan de rechte m′, die op een afstand r_1 evenwij-

dig aan m loopt. Deze hulpcirkel $(M', r' + r_1)$ is te construeren volgens geval 5 en daarna kan cirkel C' gemakkelijk bepaald worden, omdat dan het middelpunt M' bekend is.
Ook in dit geval zijn er ten hoogste acht oplossingen, maar dit aantal is weer afhankelijk van de ligging van de rechte m en de cirkels C_1 en C_2.



Geval 10: Cirkel, cirkel, cirkel. (fig. 295).

Gegeven: Cirkels C_1 (M_1, r_1), C_2 (M_2, r_2) en C_3 (M_3, r_3), waarbij $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$ is.
Dit is het oorspronkelijke raakprobleem van Apollonius, dat opgelost kan worden door het tot één van de vorige gevallen terug te brengen.
Als cirkel C' (M', r') de gevraagde cirkel is, die C_1, C_2 en C_3 raakt, dan zal hulpcirkel $(M', r' + r_1)$ door M_1 gaan en de cirkels $(M_2, r_2 - r_1)$ en $(M_3, r_3 - r_1)$ raken. Deze hulpcirkel is te construeren volgens geval 6 en daarna kan cirkel C' bepaald worden, omdat dan het middelpunt M' bekend is.
Alnaargelang de ligging van de cirkels C_1, C_2 en C_3 vinden we nul tot acht oplossingen. De gevraagde cirkel kan de gegeven cirkels namelijk uitwendig of inwendig raken.

Opmerking: Uit bovenstaande constructies is wel gebleken, dat in dié gevallen, waarin een oplossing door middel van inversie mogelijk is, doorgaans een aanzienlijke vereenvoudiging van het probleem wordt verkregen. Algemener gezien zullen we de inversie trachten toe te passen in die gevallen, waar gevraagd

wordt een cirkel te construeren, die o.a. door een gegeven punt moet gaan. Als we dat punt dan als centrum van de inversie nemen, gaat de gevraagde cirkel over in een rechte en verandert het probleem dus in een ander, waarbij gevraagd wordt een rechte te construeren, die aan bepaalde voorwaarden voldoet. In de meeste gevallen is hiermee een vereenvoudiging verkregen.

BIBLIOGRAFIE

BOTTEMA, O. *De elementaire meetkunde van het platte vlak*. Groningen, 1938.

BOTTEMA, O. *Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde*. Den Haag, 1944. Servire's encyclopedie, no. 40.

COXETER, H. S. M. *Introduction to geometry*. New York, 1961.

HILBERT, D. *Grundlagen der Geometrie*, 1938.

KLEIN, F. *Vorträge über ausgewählte Fragen der elementar Geometrie*. Leipzig, 1895.

MAHLER, G. *Ebene Geometrie*. Leipzig, 1910. Sammlung Göschen, deel 4.

MOLENBROEK, P. *Leerboek der vlakke meetkunde*. Groningen.

SCHUH, F. *Leerboek der nieuwere meetkunde van het vlak en van de ruimte*. Groningen, 1938.

STEINER, J. *Vorlesungen über synthetische Geometrie*. Leipzig, 1887–1898, 2 delen.

V. D. WAERDEN, B. L. *De logische grondslagen der euklidische meetkunde*. Groningen, 1925.

DE VRIES, J. en W. H. L. JANSSEN VAN RAAY. *Leerboek der vlakke meetkunde*. Groningen, 1927.

TIMMER, J. K. *Lagere wiskunde*, deel 2, Planimetrie. Zutphen.

IJZEREN, J. van *Moderne vlakke meetkunde*. Zutphen, Thieme, 1941.

Stelling 1: Overstaande hoeken zijn gelijk.

Stelling 2: Als twee hoeken gelijk zijn, dan zijn:
a. Hun complementen gelijk.
b. Hun supplementen gelijk.
c. Hun nevenhoeken gelijk.

Stelling 3: Als van twee hoeken
a. de complementen gelijk zijn, òf
b. de supplementen gelijk zijn, òf
c. de nevenhoeken gelijk zijn,
dan zijn die hoeken gelijk.

Stelling 4: Als twee hoeken ongelijk zijn, dan is:
a. Het complement van de grootste hoek kleiner dan het complement van de kleinste hoek.
b. Het supplement van de grootste hoek kleiner dan het supplement van de kleinste hoek.
c. De nevenhoek van de grootste hoek kleiner dan de nevenhoek van de kleinste hoek.

Stelling 5: Als P een punt is op de rechte m, dan gaat door P niet meer dan één rechte, die loodrecht op m staat.

Stelling 6: Als twee rechten zó gesneden worden door een derde rechte,
a. dat twee overeenkomstige hoeken gelijk zijn, òf
b. dat twee verwisselende binnenhoeken gelijk zijn, òf
c. dat twee verwisselende buitenhoeken gelijk zijn, òf
d. dat twee buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn samen 180° zijn, òf
e. dat twee binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn samen 180° zijn,
dan zijn die twee rechten evenwijdig.

Stelling 7: Als twee evenwijdige rechten gesneden worden door een derde, dan zijn:
a. Twee overeenkomstige hoeken gelijk.
b. Twee verwisselende binnenhoeken gelijk.
c. Twee verwisselende buitenhoeken gelijk.
d. Twee binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn samen 180°.
e. Twee buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn samen 180°.

Stelling 8: Door een punt A buiten een lijn b gaat slechts één

rechte, die evenwijdig is met b.

Stelling 9: Als de benen van een hoek evenwijdig zijn met de benen van een andere hoek, dan zijn die hoeken òf gelijk, òf samen 180°.

Stelling 10: Door een punt A buiten een lijn b gaat slechts één rechte die loodrecht op b staat.

Stelling 11: De drie hoeken van een driehoek zijn samen 180°.

Stelling 12: Een buitenhoek van een driehoek is gelijk aan de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken.

Stelling 13: Als een driehoek gelijkbenig is, dan zijn de basishoeken gelijk.

Stelling 14: Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan is die driehoek gelijkbenig.

Stelling 15: Als een driehoek gelijkzijdig is, dan zijn de drie hoeken ieder 60°.

Stelling 16: Als twee hoeken van een driehoek gelijk zijn aan twee hoeken van een andere driehoek, dan is de derde hoek van de ene driehoek gelijk aan de derde hoek van de andere driehoek.

Stelling 17: Als twee zijden van een driehoek ongelijk zijn, dan ligt tegenover de grootste van de twee een grotere hoek dan tegenover de kleinste van de twee.

Stelling 18: Als twee hoeken van een driehoek ongelijk zijn, dan ligt tegenover de grootste van de twee een grotere zijde dan tegenover de kleinste van de twee.

Stelling 19: Een zijde van een driehoek is kleiner dan de som van de twee andere zijden.

Stelling 20: Een zijde van een driehoek is groter dan het verschil van de twee andere zijden.

Stelling 21: Als twee zijden van een driehoek gelijk zijn aan twee zijden van een andere driehoek en de ingesloten hoek in de eerste driehoek is groter dan de ingesloten hoek in de tweede driehoek, dan is de derde zijde van de eerste driehoek groter dan de derde zijde van de tweede driehoek.

Stelling 22: Als twee zijden van een driehoek gelijk zijn aan twee zijden van een andere driehoek en de derde zijde in de eerste driehoek is groter dan de derde zijde in de tweede driehoek, dan is de ingesloten hoek in de eerste driehoek groter dan de ingesloten hoek in de tweede driehoek.

Stelling 23: Als twee driehoeken een zijde en de twee aanliggende hoeken gelijk hebben, dan zijn ze congruent. Geval H.Z.H.

Stelling 24: Als twee driehoeken twee zijden en de ingesloten

hoek gelijk hebben, dan zijn ze congruent. Geval Z.H.Z.

Stelling 25: Als twee driehoeken een zijde, een aanliggende en de overstaande hoek gelijk hebben, dan zijn ze congruent. Geval Z.H.H.

Stelling 26: Als twee driehoeken drie zijden gelijk hebben, dan zijn ze congruent. Geval Z.Z.Z.

Stelling 27: Als twee driehoeken twee zijden en de hoek tegenover een van die zijden gelijk hebben, terwijl de hoek tegenover die andere zijde in beide driehoeken van dezelfde soort is, dan zijn die driehoeken congruent. Geval Z.Z.H.

Stelling 28: Als twee rechthoekige driehoeken één rechthoekszijde en de schuine zijde gelijk hebben, dan zijn ze congruent. Geval Z.Z.R.

Stelling 29: Als een driehoek gelijkbenig is, dan vallen de hoogtelijn, de zwaartelijn en de bissectrice uit de top samen.

Stelling 30: Als een driehoek rechthoekig is, dan is de zwaartelijn naar de schine zijde gelijk aan de helft van de schuine zijde.

Stelling 31: Als in een driehoek de zwaartelijn naar een zijde gelijk is aan de helft van die zijde, dan is die driehoek rechthoekig, en wel zo, dat die zijde de schuine zijde is.

Stelling 32: Als in een rechthoekige driehoek één der scherpe hoeken 30° is, dan is de zijde tegenover die hoek van 30° gelijk aan de helft van de schuine zijde.

Stelling 33: De hoeken van een vierhoek zijn samen 360°.

Stelling 34: Als een vierhoek een parallellogram is, dan zijn de overstaande hoeken gelijk.

Stelling 35: Als een vierhoek een parallellogram is, dan zijn de overstaande zijden gelijk.

Stelling 36: Als een vierhoek een parallellogram is, dan delen de diagonalen elkaar middendoor.

Stelling 37: Als in een vierhoek twee paar overstaande hoeken gelijk zijn, dan is die vierhoek een parallellogram.

Stelling 38: Als in een vierhoek twee paar overstaande zijden gelijk zijn, dan is die vierhoek een parallellogram.

Stelling 39: Als in een vierhoek de diagonalen elkaar middendoor delen, dan is die vierhoek een parallellogram.

Stelling 40: Als in een vierhoek twee overstaande zijden gelijk zijn én evenwijdig zijn, dan is die vierhoek een parallellogram.

Stelling 41: Als een vierhoek een ruit is, dan zijn alle zijden gelijk.

Stelling 42: Als een vierhoek een ruit is, dan staan de diagonalen loodrecht op elkaar.

Stelling 43: Als een vierhoek een ruit is, dan delen de diagonalen de hoeken middendoor.

Stelling 44: Als in een vierhoek de vier zijden gelijk zijn, dan is die vierhoek een ruit.

Stelling 45: Als in een parallellogram de diagonalen loodrecht op elkaar staan, dan is dat paralellogram een ruit.

Stelling 46: Als in een parallellogram een diagonaal een hoek middendoor deelt, dan is dat parallellogram een ruit.

Stelling 47: Als een vierhoek een rechthoek is, dan zijn alle hoeken 90°.

Stellig 48: Als een vierhoek een rechthoek is, dan zijn de diagonalen gelijk.

Stelling 49: Als in een vierhoek de vier hoeken gelijk zijn, dan is die vierhoek een rechthoek.

Stelling 50: Als in een parallellogram de diagonalen gelijk zijn, dan is dat parallellogram een rechthoek.

Stelling 51: Als een trapezium gelijkbenig is, dan zijn de twee hoeken, die aan één der twee evenwijdige zijden grenzen, gelijk en de twee andere hoeken ook.

Stelling 52: Als een trapezium gelijkbenig is, dan zijn de diagonalen gelijk.

Stelling 53: Als in een trapezium twee hoeken, die aan één der twee evenwijdige zijden grenzen, gelijk zijn, dan is dat trapezium gelijkbenig.

Stelling 54: Als in een trapezium de diagonalen gelijk zijn, dan is dat trapezium gelijkbenig.

Stelling 55: Als een vierhoek een vierkant is, dan zijn alle hoeken 90°.

Stelling 56: Als een vierhoek een vierkant is, dan zijn de diagonalen gelijk.

Stelling 57: Als in een ruit de diagonalen gelijk zijn, dan is die ruit een vierkant.

Stelling 58: Als in een rechthoek twee opvolgende zijden gelijk zijn, dan is die rechthoek een vierkant.

Stelling 59: Als in een rechthoek de diagonalen loodrecht op elkaar staan, dan is die rechthoek een vierkant.

Stelling 60: Als in een rechthoek een diagonaal een hoek middendoor deelt, dan is die rechthoek een vierkant.

Stelling 61: Als een lijnstuk de middens van twee zijden van een driehoek verbindt, dan is dat lijnstuk evenwijdig met de

derde zijde en gelijk aan de helft van de derde zijde.

Stelling 62: Als een lijnstuk de middens van de opstaande zijden van een trapezium verbindt, dan is dat lijnstuk evenwijdig met de evenwijdige zijden en gelijk aan de halve som van de evenwijdige zijden.

Stelling 63: Als vier lijnstukken de middens van telkens twee opvolgende zijden van een vierhoek verbinden, dan vormen die lijnstukken een parallellogram.

Stelling 64: Als enige evenwijdige lijnen op een snijlijn gelijke stukken bepalen, dan zijn de stukken, die ze op een andere snijlijn bepalen ook gelijk.

Stelling 65: Als enige evenwijdige lijnen gesneden worden door twee andere lijnen, dan is de verhouding van de stukken op de ene snijlijn gelijk aan de verhouding van de corresponderende stukken op de andere snijlijn.

Stelling 66: Als een lijn evenwijdig is met een zijde van een driehoek dan snijdt deze lijn een driehoek af, waarvan de zijden evenredig zijn met de corresponderende zijden van de oorspronkelijke driehoek.

Stelling 67: Als een lijn door twee verschillende punten A en B gaat, dan is er op m juist één punt P tussen A en B waarvoor geldt, dat $PA : PB = k$ en ook juist één punt Q dat niet tussen A en B ligt, waarvoor geldt, dat $QA : QB = k$, waarbij k in beide gevallen een positief reëel getal voorstelt.

Stelling 68: Als de afstand van het middelpunt van een cirkel tot een rechte groter is dan de straal van de cirkel, dan hebben de cirkel en de rechte geen enkel gemeenschappelijk punt.

Stelling 69: Als de afstand van het middelpunt van een cirkel tot een rechte kleiner is dan de straal van de cirkel, dan hebben de cirkel en de rechte twee gemeenschappelijke punten.

Stelling 70: Als de afstand van het middelpunt van een cirkel tot een rechte gelijk is aan de straal van de cirkel, dan hebben de cirkel en de rechte één gemeenschappelijk punt.

Stelling 71: Als een lijn m raakt aan een cirkel (M, r), dan staat lijn m loodrecht op de straal, die naar het raakpunt gaat.

Stelling 72: Een middelpuntshoek van een cirkel is gelijk aan de boog waarop hij staat.

Stelling 73: Een omtrekshoek van een cirkel is gelijk aan de helft van de boog waarop hij staat.

Stelling 74: Een binnenomtrekshoek is gelijk aan de halve som van de bogen, die tussen de benen van die hoek en tussen die van zijn overstaande hoek liggen.

Stelling 75: Een buitenomtrekshoek is gelijk aan het halve verschil van de twee bogen, die tussen de benen van die hoek liggen.

Stelling 76: De hoek gevormd door een raaklijn en een koorde uit het raakpunt is gelijk aan de helft van de boog, die tussen de benen van die hoek ligt.

Stelling 77: Als in een cirkel twee koorden gelijk zijn, dan zijn de bijbehorende bogen ook gelijk.

Stelling 78: Als in een cirkel twee bogen gelijk zijn, dan zijn de bijbehorende koorden ook gelijk.

Stelling 79: Als binnen een cirkel twee koorden evenwijdig zijn, dan zijn de twee tussenliggende bogen ook gelijk.

Stelling 80: Als een straal van een cirkel loodrecht staat op een koorde van de cirkel, dan deelt deze straal de koorde middendoor.

Stelling 81: Als een straal van een cirkel door het midden van een koorde van die cirkel gaat, dan staat deze straal loodrecht op die koorde.

Stelling 82: Een rechte m gaat door een verplaatsing V over in een rechte m′.

Stelling 83: Een lijnstuk AB gaat door een verplaatsing V over in een lijnstuk A′B′.

Stelling 84: Een hoek BAC gaat door een verplaatsing V over in een hoek B′A′C′.

Stelling 85: Een driehoek ABC gaat door een verplaatsing V over in een driehoek A′B′C′.

Stelling 86: Een cirkel (M, r) gaat bij een verplaatsing V over in een cirkel (M′, r′).

Stelling 87: Bij een draaiing (O, $\angle P$) beschrijft ieder punt A van een figuur F een deel van een cirkel, die O als middelpunt en OA als straal heeft, terwijl $\angle AOA' = \angle P$.

Stelling 88: Bij een translatie (PP′) gaat ieder punt A van een figuur F over in een punt A′, waarbij lijnstuk AA′ gelijk is aan en evenwijdig is met het gegeven lijnstuk PP′.

Stelling 89: Bij een spiegeling met m als as, gaat ieder punt A van een figuur F over in een punt A′, zodanig, dat m middelloodlijn is van AA′.

Stelling 90: Als we twee rechtstreeks of tegengesteld congruente driehoeken hebben, dan kan de ene door ten hoogste drie spiegelingen in de andere overgaan.

Stelling 91: Het produkt van een translatie en een rotatie is weer een rotatie, maar met een ander centrum en dezelfde

rotatiehoek.

Stelling 92: Als we een rechte m vermenigvuldigen met een factor k vanuit het centrum O, dan is de produktfiguur van m een rechte m′, die samenvalt met m, als O op m ligt en die evenwijdig loopt met m, als O niet op m ligt.

Stelling 93: Als we een lijnstuk AB vermenigvuldigen met een factor k vanuit het centrum O, dan is de produktfiguur een lijnstuk A′B′, dat op de rechte m door A en B ligt, als O ook op die rechte ligt en dat evenwijdig is met AB, als O niet op die rechte ligt, terwijl in beide gevallen $A'B' = |k| \cdot AB$.

Stelling 94: Als we een hoek A vermenigvuldigen met een factor k vanuit een centrum O, dan is de produktfiguur een hoek A′, die gelijk is aan hoek A en waarvan de benen evenwijdig zijn aan die van hoek A.

Stelling 95: Als we een driehoek ABC vermenigvuldigen met een factor k vanuit een centrum O, dan is de produktfiguur weer een driehoek, waarvan de zijden evenwijdig zijn aan en |k| maal zo groot zijn als de corresponderende zijden van driehoek ABC.

Stelling 96: Als we een cirkel (M, r) vermenigvuldigen met een factor k vanuit een centrum O, dan is de produktfiguur weer een cirkel en wel (M′, r′), waarbij M′ het produktpunt is van M en $r' = |k| \cdot r$.

Stelling 97: Bij een scheve affiniteit bestaat er een vaste verhouding tussen de afstanden van twee corresponderende punten tot de affiniteitsas, gemeten langs de verbindingsrechte van die punten.

Stelling 98: Als twee driehoeken twee hoeken gelijk hebben, dan zijn ze gelijkvormig. Geval h.h.

Stelling 99: Als twee driehoeken een hoek gelijk hebben en de zijden om die hoek evenredig zijn, dan zijn die driehoeken gelijkvormig. Geval z.h.z.

Stelling 100: Als de zijden van een driehoek evenredig zijn met de zijden van een andere driehoek, dan zijn die driehoeken gelijkvormig. Geval z.z.z.

Stelling 101: Als van twee driehoeken twee paar zijden evenredig zijn en de hoeken tegenover het ene paar gelijk zijn, terwijl de hoeken tegenover het andere paar van dezelfde soort zijn, dan zijn die driehoeken gelijkvormig. Geval z.z.h.

Stelling 102: De meetkundige plaats van de punten, die op gelijke afstand liggen van twee gegeven punten P en Q, is de middelloodlijn van lijnstuk PQ.

Stelling 103: De meetkundige plaats van de punten, die op gelijke afstand liggen van de benen van een hoek P, is de bissectrice van hoek P.

Stelling 104: De meetkundige plaats van de punten, die op gelijke afstand liggen van twee snijdende lijnen m en n, bestaat uit de vier halve rechten, die de vier door m en n gevormde hoeken middendoor delen.

Stelling 105: De meetkundige plaats van de punten, die op gelijke afstand liggen van twee evenwijdige lijnen p en q, is de lijn r die evenwijdig is met p en q en midden tussen p en q ligt.

Stelling 106: De meetkundige plaats van de punten, die op een afstand a van een punt P liggen, is de cirkel (P, a).

Stelling 107: De meetkundige plaats van de punten, die op een afstand a van een rechte m liggen, bestaat uit twee rechten p en q, die evenwijdig zijn met m zodanig, dat m tussen p en q ligt en die een afstand a tot m hebben.

Stelling 108: De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels met een gegeven straal r, die door een gegeven punt P gaan, is de cirkel (P, r). Zie ook stelling 106.

Stelling 109: De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels met een gegeven straal r, die aan een gegeven rechte m raken, bestaat uit twee rechten p en q, die evenwijdig met m zijn en die een afstand r tot m hebben, terwijl m tussen p en q ligt. Zie ook stelling 107.

Stelling 110: De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels die in een gegeven punt A aan een rechte m raken, is de loodlijn door A op m.

Stelling 111: De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die door twee gegeven punten P en Q gaan, is de middelloodlijn van PQ. Zie ook stelling 102.

Stelling 112: De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die aan de benen van een gegeven hoek P raken, is de bissectrice van $\angle P$. Zie ook stelling 103.

Stelling 113: De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die twee gegeven snijdende lijnen p en q raken, bestaat uit de bissectrices van de door p en q gevormde hoeken. Zie stelling 104.

Stelling 114: De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die aan twee gegeven evenwijdige rechten p en q raken, is de lijn r, die evenwijdig is met p en q en midden tussen p en q ligt. Zie ook stelling 105.

Stelling 115: De meetkundige plaats van de toppen C van de driehoeken, die een gegeven basis AB en een gegeven hoek C hebben, is een deel van een cirkel, die door A en B gaat.

Stelling 116: Als een driehoek rechthoekig is, is het kwadraat van een rechthoekszijde gelijk aan het produkt van de schuine zijde en de projectie van die rechthoekszijde op de schuine zijde.

Stelling 117: De stelling van Pythagoras: Als een driehoek rechthoekig is, dan is de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde.

Stelling 118: Als een driehoek rechthoekig is, dan is het kwadraat van de hoogtelijn op de schuine zijde gelijk aan het produkt van de twee stukken, waarin deze hoogtelijn de schuine zijde verdeelt.

Stelling 119: Als een driehoek rechthoekig is, dan is het produkt van de twee rechthoekszijden gelijk aan het produkt van de schuine zijde en de hoogtelijn op de schuine zijde.

Stelling 120: Als in een rechthoekige driehoek één der scherpe hoeken 30° is, dan zijn de zijden gelijk te stellen aan 2k, k en $k\sqrt{3}$.

Stelling 121: Als in een rechthoekige driehoek de twee scherpe hoeken ieder 45° zijn, dan zijn de zijden gelijk te stellen aan p, p en $p\sqrt{2}$.

Stelling 122: Als in een driehoek het kwadraat van de grootste zijde groter is dan de som van de kwadraten van d etwee andere zijden, dan is die driehoek stomphoekig.

Stelling 123: Als in een driehoek het kwadraat van de grootste zijde gelijk is aan de som van de kwadraten van de twee andere zijden, dan is die driehoek rechthoekig.

Stelling 124: Als in een driehoek het kwadraat van de grootste zijde kleiner is dan de som van de kwadraten van de beide andere zijden, dan is die driehoek scherphoekig.

Stelling 125: Als in een driehoek een zijde tegenover een scherpe hoek ligt, dan is het kwadraat van die zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de tweede en de derde zijde, verminderd met het dubbelprodukt van de tweede zijde en de projectie van de derde op de tweede zijde. (projectiestelling)

Stelling 126: Als in een driehoek een zijde tegenover een stompe hoek ligt, dan is het kwadraat van die zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de tweede en de derde zijde vermeerderd met het dubbelprodukt van de tweede zijde en de projectie van de derde zijde op de tweede zijde.

Stelling 127: Als in een driehoek ABC een lijnstuk CD het hoekpunt C verbindt met een punt D van de zijde AB, dan is $CD^2 \cdot AB = BC^2 \cdot AD + AC^2 \cdot BD - AD \cdot DB \cdot AB$. (stelling van Stewart)

Stelling 128: Als een rechte m de zijden BC, AC en AB van △ABC of de verlengden van die zijden snijdt in de punten D, E en F, dan is $\frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1$. (Stelling van Menelaos)

Stelling 129: Als op de zijden BC, AC en AB van △ABC of op de verlengden van die zijden respectievelijk de punten D, E en F liggen, en $\frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1$, dan liggen D, E en F op een rechte.

Stelling 130: Als P een punt is binnen of buiten △ABC en de rechten AP, BP en CP snijden BC, AC en AB (of hun verlengden) respectievelijk in D, E en F, dan is

$$\frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1.$$

Stelling 131: Als op de zijden BC, AC en AB van △ABC (of op hun verlengden) respectievelijk de punten D, E en F liggen en $\frac{DB \cdot EC \cdot FA}{DC \cdot EA \cdot FB} = 1$, dan gaan AD, BE en CF (of hun verlengden) door één punt.

Stelling 132: De middelloodlijnen in een driehoek gaan door één punt.

Stelling 133: De bissectrices van een driehoek gaan door één punt.

Stelling 134: Twee buitenbissectrices en de binnenbissectrice van de derde hoek van een driehoek gaan door één punt.

Stelling 135: De zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt.

Stelling 136: De hoogtelijnen van een driehoek gaan door één punt.

Stelling 137: Een bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde inwendig in twee stukken, die zich verhouden als de aangrenzende zijden.

Stelling 138: Een buitenbissectrice van een driehoek verdeelt de overstaande zijde uitwendig in stukken, die zich verhouden als de aangrenzende zijden.

Stelling 139: De zwaartelijnen van een driehoek verdelen elkaar in stukken, die zich verhouden als 2 : 1.

Stelling 140: De hoogtelijnen van een driehoek zijn omgekeerd evenredig met de zijden, waar ze naartoe getrokken zijn.

Stelling 141: Als in $\triangle ABC$ de bissectrice van $\angle C$ de zijde AB verdeelt in de stukken c_1 en c_2, dan is $d_c^2 = a \cdot b - c_1 \cdot c_2$. (bissectriceformule)

Stelling 142: Als in $\triangle ABC$ de buitenbissectrice van $\angle C$ de zijde AB uitwendig verdeelt in de stukken c_1 en c_2, dan is het kwadraat van deze buitenbissectrice gelijk aan $c_1 \cdot c_2 - a \cdot b$.

Stelling 143: Als 2s de omtrek van $\triangle ABC$ voorstelt, dan is $h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Stelling 144: Voor de zwaartelijn z_a van een driehoek ABC geldt: $z_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$.

Stelling 145: Als D en E de voetpunten zijn van de hoogtelijnen AD en BE in $\triangle ABC$, dan is $\angle CDE = \angle CAB$ en $\angle CED = \angle CBA$.

Stelling 146: Als $\triangle DEF$ de voetpuntsdriehoek van het hoogtepunt van de scherphoekige driehoek ABC is, dan zijn de hoogtelijnen van $\triangle ABC$ bissectrices in $\triangle DEF$.

Stelling 147: Als H het hoogtepunt, Z het zwaartepunt en M het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ zijn, dan liggen H, Z en M op een rechte (rechte van Euler) en wel zo, dat $HZ = 2ZM$.

Stelling 148: Als twee rechthoeken gelijke bases hebben, dan verhouden hun oppervlakten zich als hun hoogten.

Stelling 149: Als de maatgetallen van de basis en de hoogte van twee rechthoeken gelijk zijn aan b en h, respectievelijk b' en h', dan verhouden de oppervlakten O en O' van die rechthoeken zich als $b \cdot h : b' \cdot h'$.

Stelling 150: De oppervlakte van een rechthoek is het produkt van basis en hoogte.

Stelling 151: De oppervlakte van een vierkant is het kwadraat van een zijde van het vierkant.

Stelling 152: De oppervlakte van een parallellogram is gelijk aan het produkt van de basis en de hoogte van het parallellogram.

Stelling 153: De oppervlakte van een driehoek is gelijk aan het halve produkt van de basis en de hoogtelijn op de basis.

Stelling 154: De oppervlakte van een trapezium is gelijk aan het halve produkt van de hoogte en de som der evenwijdige zijden van het trapezium.

Stelling 155: De oppervlakte van een vierhoek, waarvan de

diagonalen loodrecht op elkaar staan, is gelijk aan het halve produkt van de diagonalen.

Stelling 156: De oppervlakte van een ruit is gelijk aan het produkt van de basis en de hoogte en is ook gelijk aan het halve produkt van de diagonalen.

Stelling 157: Als 2s de omtrek is van $\triangle ABC$ met zijden a, b en c, dan is de oppervlakte van $\triangle ABC$ gelijk aan $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Stelling 158: Als twee driehoeken een zijde gelijk hebben, dan verhouden hun oppervlakten zich als de hoogtelijnen op die gelijke zijden.

Stelling 159: Als twee driehoeken een hoogtelijn gelijk hebben, dan verhouden hun oppervlakten zich als de beide zijden, waar die gelijke hoogtelijnen loodrecht op staan.

Stelling 160: Als twee driehoeken een hoek gelijk hebben, dan verhouden hun oppervlakten zich als de produkten van de zijden om die gelijke hoeken.

Stelling 161: Als een hoek van een driehoek het supplement is van een hoek van een andere driehoek, dan verhouden de oppervlakten van deze driehoeken zich als de produkten van de zijden om de supplementshoeken.

Stelling 162: Als we een hoekpunt van een driehoek schuiven langs een rechte, die door dat hoekpunt gaat en evenwijdig is met de overstaande zijde, dan blijft de oppervlakte van de veranderlijke driehoek ABC steeds hetzelfde.

Stelling 163: Als twee driehoeken gelijkvormig zijn, dan verhouden hun oppervlakten zich als de kwadraten van een paar corresponderende zijden.

Stelling 164: Als we een driehoek ABC vermenigvuldigen met k en driehoek $A'B'C'$ is de produktfiguur, dan is opp. $A'B'C' = |k|^2 \cdot$ opp. ABC.

Stelling 165: Als een koorde en een middellijn in een cirkel een gemeenschappelijk eindpunt hebben, dan is het kwadraat van de koorde gelijk aan het produkt van de middellijn en de projectie van de koorde op de middellijn.

Stelling 166: Als uit een punt van een cirkel een loodlijn is neergelaten op een middellijn van die cirkel, dan is het kwadraat van die loodlijn gelijk aan het produkt van de stukken, waarin die loodlijn de middellijn verdeelt.

Stelling 167: Als twee koorden AB en CD in een cirkel elkaar snijden in S, dan is $SA \cdot SB = SC \cdot SD$.

Stelling 168: Als twee snijlijnen AB en CD van een cirkel (M, r)

elkaar in een punt S buiten de cirkel snijden, dan is $SA \cdot SB = SC \cdot SD$.

Stelling 169: Als een snijlijn AB van een cirkel en een raaklijn in C aan die cirkel elkaar in S snijden, dan is $SC^2 = SA \cdot SB$.

Stelling 170: Als de afstand van een punt P tot het middelpunt van de cirkel (M, r) gelijk is aan d en C is een punt van de cirkel, dan is $|d - r| \leqslant PC \leqslant d + r$. Er is juist één punt C op de cirkel waarvoor $|d - r| = PC$ is en ook juist één punt, waarvoor $PC = d + r$.

Stelling 171: Als de afstand van de middelpunten van twee cirkels groter is dan de som van hun stralen, dan liggen die cirkels buiten elkaar.

Stelling 172: Als de afstand van de middelpunten van twee cirkels gelijk is aan de som van hun stralen, dan hebben die cirkels één en niet meer dan één gemeenschappelijk punt en liggen ze verder buiten elkaar.

Stelling 173: Als de afstand van de middelpunten van twee cirkels kleiner is dan de som en groter dan het verschil van hun stralen, dan hebben die cirkels twee en niet meer dan twee gemeenschappelijke punten.

Stelling 174: Als de afstand van de middelpunten van twee cirkels met ongelijke stralen gelijk is aan het verschil van hun stralen, dan hebben die cirkels één en niet meer dan één gemeenschappelijk punt en ligt de ene cirkel binnen de andere.

Stelling 175: Als de afstand van de middelpunten van twee cirkels met ongelijke stralen kleiner is dan het verschil van hun stralen, dan ligt de ene cirkel geheel binnen de andere.

Stelling 176: Als twee cirkels geheel buiten elkaar liggen, dan is de afstand van hun middelpunten groter dan de som van hun stralen.

Stelling 177: Als twee cirkels elkaar uitwendig raken, dan is de afstand van hun middelpunten gelijk aan de som van hun stralen.

Stelling 178: Als twee cirkels elkaar snijden, dan is de afstand van hun middelpunten kleiner dan de som en groter dan het verschil van hun stralen.

Stelling 179: Als twee cirksls met ongelijke stralen elkaar inwendig raken, dan is de afstand van hun middelpunten gelijk aan het verschil van hun stralen.

Stelling 180: Als een cirkel geheel binnen een andere cirkel ligt, dan is de afstand van hun middelpunten kleiner dan het verschil van hun stralen.

Stelling 181: Als twee cirkels elkaar snijden, dan deelt de centraal de gemeenschappelijke koorde loodrecht middendoor.

Stelling 182: Als twee cirkels elkaar raken, dan ligt het raakpunt op de centraal en hebben ze in het raakpunt raaklijnen, die samenvallen.

Stelling 183: Als een punt P buiten een cirkel ligt, dan gaan door P twee verschillende raaklijnen aan de cirkel.

Stelling 184: Als twee raaklijnen in A en B aan een cirkel (M, r) elkaar snijden in P, dan is PA = PB en $\angle APM = \angle BPM$.

Stelling 185: Een uitwendig (inwendig) gemeenschappelijke raaklijn aan twee cirkels gaat door het uitwendig (inwendig) gelijkvormigheidspunt van die cirkels.

Stelling 186: Als de ingeschreven cirkel (I, r) van $\triangle ABC$ de zijden BC, AC en AB raakt in D, E en F, dan is $AD = AE = s - a$, $BD = BF = s - b$ en $CD = CE = s - c$.

Stelling 187: Als de aangeschreven cirkel aan de zijde BC van $\triangle ABC$ BC raakt in D en de verlengden van AB en AC in G en H, dan is $AG = AH = s$, $BD = s - c$ en $CD = s - b$.

Stelling 188: Als de cirkel (M, r) de omgeschreven cirkel is van $\triangle ABC$, dan is $R = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot \text{opp.}}$, waarin opp. de oppervlakte van $\triangle ABC$ voorstelt.

Stelling 189: Als cirkel (I, r) de ingeschreven cirkel is van $\triangle ABC$, dan is $r = \text{opp.}/s$, waarin opp. de oppervlakte van $\triangle ABC$ is.

Stelling 190: Als de cirkel (I_a, r_a) de aangeschreven cirkel is aan de zijde BC van $\triangle ABC$, dan is $r_a = \dfrac{\text{opp.}}{s - a}$.

Stelling 191: Als een vierhoek een koordenvierhoek is, dan is de som van elk paar overstaande hoeken 180°.

Stelling 192: Als in een vierhoek de som van twee overstaande hoeken 180° is, dan is die vierhoek een koordenvierhoek.

Stelling 193: Als in een koordenvierhoek twee verschillende hoeken, beide gevormd door een zijde en een diagonaal, op éénzelfde zijde van de koordenvierhoek staan, dan zijn deze hoeken gelijk.

Stelling 194: Als in een vierhoek twee verschillende hoeken, beide gevormd door een zijde en een diagonaal van de vierhoek, op éénzelfde zijde van die vierhoek staan en gelijk zijn aan elkaar, dan is die vierhoek een koordenvierhoek.

Stelling 195: Als een vierhoek een koordenvierhoek is, dan is de som van de produkten van de overstaande zijden gelijk aan het produkt van de diagonalen. (stelling van Ptolemaeus)

Stelling 196: Als een vierhoek een raaklijnenvierhoek is, dan is de som van het ene paar overstaande zijden gelijk aan de som van het andere paar overstaande zijden.

Stelling 197: Als in een vierhoek, waarvan de hoeken kleiner zijn dan 180°, de som van het ene paar overstaande zijden gelijk is aan de som van het andere paar overstaande zijden, dan is die vierhoek een raaklijnenvierhoek.

Stelling 198: Als een rechte door een punt P gaat en een cirkel (M, r) snijdt in A en B, dan is de macht van P ten opzichte van cirkel (M, r) gelijk aan $PA \cdot PB$.

Stelling 199: Als een punt P buiten een cirkel ligt en een raaklijn door P raakt de cirkel in C, dan is de macht van P ten opzichte van de cirkel gelijk aan PC^2.

Stelling 200: De meetkundige plaats van de punten die gelijke machten hebben ten opzichte van twee niet concentrische cirkels is een rechte, die loodrecht op de centraal staat.

Stelling 201: Als twee cirkels elkaar snijden, dan gaat de machtlijn van die cirkels door hun snijpunten.

Stelling 202: Als twee cirkels elkaar raken, dan valt de machtlijn samen met de raaklijn in het raakpunt.

Stelling 203: Als de middelpunten van drie cirkels niet op een rechte liggen, dan gaan de drie machtlijnen van die cirkels door één punt.

Stelling 204: De meetkundige plaats van de toppen van de driehoeken, die dezelfde oppervlakte hebben als een gegeven driehoek ABC en die met deze driehoek de basis AB gemeenschappelijk hebben, bestaat uit de rechte m door C evenwijdig aan AB en de rechte m′ die het spiegelbeeld is van m bij spiegeling in de rechte door A en B.

Stelling 205: De meetkundige plaats van de toppen van de driehoeken ABC met een gegeven basis AB waarvan de opstaande zijden AC en BC zich verhouden als twee gegeven lijnstukken m en n, is een cirkel.

Stelling 206: De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels met een gegeven straal a die een gegeven cirkel (M,r) raken, bestaat uit twee cirkels $(M, r + a)$ en $(M, |r - a|)$.

Stelling 207: De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die een gegeven cirkel (M, r) raken in een gegeven

punt A, is de rechte door M en A, met uitzondering van het punt M.

Stelling 208: De meetkundige plaats van de punten, die een gegeven macht m^2 hebben ten opzichte van een gegeven cirkel (M, r) is een cirkel, met M als middelpunt en $\sqrt{r^2 + m^2}$ als straal.

Stelling 209: De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die twee gegeven cirkels (M, r) en (M′, r′) beide loodrecht snijden, is het buiten die cirkels gelegen gedeelte van de machtlijn van die twee cirkels.

Stelling 210: Een n-hoek heeft $\frac{1}{2}n(n-3)$ diagonalen.

Stelling 211: De hoeken van een n-hoek zijn samen $(n-2) \cdot 180°$.

Stelling 212: Eén zijde van een n-hoek is kleiner dan de som van de andere $n-1$ zijden.

Stelling 213: Als een n-hoek regelmatig is, dan is het een koorden-n-hoek.

Stelling 214: Als een n-hoek regelmatig is, dan is het een raaklijnen-n-hoek.

Stelling 215: Als r de straal van de omgeschreven cirkel van een regelmatige zeshoek is, dan is de zijde a_6 van die zeshoek gelijk aan r.

Stelling 216: Als r de straal van de omgeschreven cirkel is van een regelmatige driehoek, dan is de zijde a_3 van die driehoek gelijk aan $r\sqrt{3}$.

Stelling 217: Als r de straal van de omgeschreven cirkel van een regelmatige vierhoek is, dan is de zijde a_4 gelijk aan $r\sqrt{2}$.

Stelling 218: Als r de straal van de omgeschreven cirkel van een regelmatige achthoek is, dan is de zijde a_8 gelijk aan $r\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Stelling 219: Als r de straal van de omgeschreven cirkel van een regelmatige n-hoek is, dan is de zijde van de regelmatige 2n-hoek gelijk aan $\sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a_n^2}}$.

Stelling 220: Als r de straal is van de omgeschreven cirkel van de regelmatige twaalfhoek, dan is de zijde a_{12} gelijk aan $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Stelling 221: Als r de straal is van de omgeschreven cirkel van de regelmatige tienhoek, dan is de zijde a_{10} gelijk aan $\frac{1}{2}r(-1+\sqrt{5})$.

Stelling 222: Als r de straal is van de omgeschreven cirkel van de regelmatige vijfhoek, dan is de zijde a_5 gelijk aan $\frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Stelling 223: Als A_n de zijde is van een omgeschreven regelmatige n-hoek van een cirkel met straal r, dan is A_n gelijk aan $\frac{2a_n \cdot r}{\sqrt{4r^2 - a_n^2}}$, waarin a_n de zijde van de ingeschreven regelmatige n-hoek is.

Stelling 224: Als r de straal van de omgeschreven cirkel is, dan is de oppervlakte van een regelmatige n-hoek gelijk aan $\frac{1}{2}d \cdot n \cdot a_n$, waarin d het apothema en a_n de zijde van die n-hoek is.

Stelling 225: Als r de straal van de ingeschreven cirkel is, dan is de oppervlakte van een regelmatige n-hoek gelijk aan $\frac{1}{2}r \cdot n \cdot a_n$, waarin a_n de zijde van die n-hoek is.

Stelling 226: Als een lijnstuk a in uiterste en middelste reden verdeeld is, dan is het grootste stuk $\frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5})$ en het kleinste stuk is $\frac{1}{2}a(3 - \sqrt{5})$.

Stelling 227: Als alle punten van een convexe veelhoek V_1 inwendige (of eventueel voor een deel grenspunten) zijn van een convexe veelhoek V_2, dan is de omtrek van V_1 kleiner dan de omtrek van V_2.

Stelling 228: Als r de straal van een cirkel is, dan is de omtrek van die cirkel gelijk aan $2\pi r$.

Stelling 229: Als r de straal van een cirkel is, dan is de oppervlakte van die cirkel gelijk aan πr^2.

Stelling 230: Als twee punten A en B bij de inversie (O, k^2) overgaan in A′ en B′, dan is AA′B′B een koordenvierhoek.

Stelling 231: Als een rechte lijn m geïnverteerd wordt volgens (O, k^2) en O ligt op m, dan is de inverse figuur een rechte m′, die met m samenvalt.

Stelling 232: Als een rechte lijn m geïnverteerd wordt volgens (O, k^2) en O ligt niet op m, dan is de inverse figuur van m een cirkel, die door O gaat.

Stelling 233: Als een cirkel (M, r) geïnverteerd wordt volgens (O, k^2) en O ligt op de cirkel, dan is de inverse figuur van cirkel (M, r) een rechte lijn, die loodrecht op OM staat.

Stelling 234: Als een cirkel (M, r) geïnverteerd wordt volgens (O, k^2) en O ligt niet op de cirkel, dan is de inverse figuur van cirkel (M, r) een cirkel (M′, r′).

Stelling 235: Als de cirkel (M, r) door de inversie (O, k^2) overgaat in de cirkel (M′, r′) en P en P′ zijn twee inverse punten van de cirkels, dan maken de raaklijn in P aan cirkel (M, r) en de raaklijn in P′ aan cirkel (M′, r′) gelijke hoeken met de rechte door O, P en P′.

Stelling 236: Als twee cirkels elkaar snijden onder een bepaalde hoek, dan snijden hun inverse cirkels elkaar onder dezelfde hoek, als het centrum van de inversie niet op de cirkels ligt.

Stelling 237: Als de punten A en B bij de inversie (O, k^2) overgaan in A′ en B′, dan is $A'B' = \dfrac{k^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}$.

Stelling 238: We mogen twee van de vier punten in een dubbelverhouding verwisselen, mits we de andere twee punten ook verwisselen.

Stelling 239: Als we het derde en het vierde punt in een dubbelverhouding verwisselen, dan is het produkt van de nieuwe dubbelverhouding en de oorspronkelijke gelijk aan 1.

Stelling 240: Als we het tweede en het derde punt in een dubbelverhouding verwisselen, dan is de som van de nieuwe dubbelverhouding en de oorspronkelijke gelijk aan 1.

Stelling 241: Als de stralen van een vierstraal gesneden worden door twee verschillende rechten, dan is de dubbelverhouding (ABCD) van de vier snijpunten op de ene rechte gelijk aan de dubbelverhouding (A′B′C′D′) van de vier corresponderende snijpunten op de andere rechte.

Stelling 242: Als een rechte evenwijdig is aan één van de stralen van een harmonische vierstraal, dan liggen twee van de snijpunten van die rechte met de andere stralen op gelijke afstand van het derde snijpunt.

Stelling 243: Als de punten A en B door de punten C en D harmonisch gescheiden worden en M is het midden van AB, dan is $MA^2 = MC \cdot MD$.

Stelling 244: Als een punt P binnen of buiten een hoek A ligt, dan is de poollijn van P ten opzichte van hoek A een rechte p door A.

Stelling 245: Als een punt P binnen of buiten een cirkel (M, r) ligt, dan is de poollijn van P ten opzichte van cirkel (M, r) een rechte p, die loodrecht op MP staat.

Stelling 246: De poollijnen van alle punten van een rechte p ten opzichte van een cirkel (M, r) gaan door één punt. Dit punt is de pool P van p ten opzichte van die cirkel.

Stelling 247: De polen van alle rechten door een punt P t.o.v. een cirkel (M, r) liggen op een rechte. Deze rechte is de poollijn p van P ten opzichte van de cirkel.

Stelling 248: Als een punt P buiten een cirkel (M, r) ligt, dan is de raakkoorde van P de poollijn van P ten opzichte van cirkel (M, r).

Stelling 249: Als twee paar zijden van een volledige vierhoek loodrecht op elkaar staan, dan staat het derde paar zijden ook loodrecht op elkaar.

Stelling 250: Als P, Q en R de middens zijn van de diagonalen van een volledige vierzijde, dan liggen P, Q en R op een rechte.

Stelling 251: Als P en Q de snijpunten zijn van een diagonaal van een volledige vierzijde met de beide andere diagonalen dan zijn P en Q harmonisch toegevoegd aan de twee hoekpunten op die diagonaal.

Stelling 252: Als twee zijden van een volledige vierzijde elkaar in A snijden, dan vormen deze twee zijden met de diagonaal door A en met de verbindingslijn van A met het snijpunt van de twee andere diagonalen een harmonische vierstraal.

Stelling 253: Als we twee diagonaalpunten van een volledige vierhoek verbinden met het derde diagonaalpunt, dan vormen deze twee verbindingslijnen met de twee zijden door het derde diagonaalpunt een harmonische vierstraal.

Stelling 254: Als we twee diagonaalpunten van een volledige vierhoek verbinden, dan is deze lijn de poollijn van het derde diagonaalpunt t.o.v. de twee zijden door het eerste òf ten opzichte van de twee zijden door het tweede diagonaalpunt.

Stelling 255: Als de punten A, B, C en D harmonisch liggen, dan zal de cirkel met AB als middellijn iedere cirkel van de bundel, die C en D als basispunten heeft, loodrecht snijden.

Stelling 256: Als P en Q gegeven punten zijn, dan vormen alle cirkels, waarvoor geldt, dat de machten van P en Q ten opzichte van deze cirkels gelijk zijn aan m^2 en n^2, een bundel met PQ als machtlijn.

Stelling 257: Als (M, r) en (M', r') twee gegeven cirkels zijn, dan vormen alle cirkels, die de twee gegeven cirkels loodrecht snijden, een bundel, waarvan MM' de machtlijn is.

Stelling 258: Als AB een gegeven lijnstuk is en $p:q$ een veranderlijke verhouding, dan vormen alle cirkels van Apollonius voor lijnstuk AB bij een verhouding $p:q$ een bundel.

REGISTER

aangeschreven cirkel 167, 207, 258
aanliggende hoek 47
achthoek, regelmatige – 234, 275
afbeelding, identieke – 107
affiniteit, scheve –, definitie 125
affiniteits-as 126
antiparallel 177
Apollonius
–, cirkels van – 226, 273, 302
–, raakprobleem van – 303
apothema, definitie 232
as van spiegeling 114
asspiegeling 126
asvermenigvuldiging 126
axioma 11
–, ordenings– 12 e.v.
–, verbindings– 12 e.v.
–, verplaatsings– 12 e.v., 106 e.v.
axioma's, onderling afhankelijke – 12
axiomastelsel 12 e.v.

basispunten van een bundel 297
bewijsschema 21
binnengebied van een hoek 18
binnenhoeken 27 e.v.
–, verwisselende – 27 e.v.
binnenomtrekshoek in een cirkel 100
–, definitie 92
bissectrice
– formule 170
– van een driehoek, definitie 38, 162
– van een hoek 54
– van een hoek, definitie 38
buitenbissectrice van een driehoek, definitie 38, 162
buitengebied van een hoek 18
buitenhoek van een driehoek, definitie 38
buitenhoeken 27 e.v.
–, verwisselende 28 e.v.
buitenomtrekshoek van een cirkel 100
–, definitie 92
bundel
–, basispunten van een – 297
–, grenspunten van een – 299

centraal van de cirkels 202
centrale
– collineatie 106, 124
– collineatie, definitie 123
– projectie, definitie 124
cirkel
–, aangeschreven – 167, 207, 258
–, binnenomtrekshoek van een – 100
–, buitenomtrekshoek van een – 100
–, definitie 91
–, ingeschreven – 167, 207, 256
–, macht t.o.v. een –, definitie 223
–, machtlijn t.o.v. een –, definitie 222
–, omgeschreven – 167, 207, 232 e.v., 256
–, omtrek van een –, definitie 242 e.v.
–, oppervlakte van een –, definitie 244
– van Feuerbach 179
cirkelbundel 299
–, concentrische – 300
–, definitie 297
–, orthogonale – 299
cirkels
–, centraal van de – 202
–, hoek van twee –, definitie 227
–, machtlijn van – 274
–, concentrische – 202
– van Apollonius 226, 273, 302

cirkelsector, definitie 91
cirkelsegment, definitie 91
collineair zijn van punten 161, 293
collineatie
– as 124
–, centrale – 106, 124
–, centrale –, definitie 123
complement 20 e.v.
concentrische
– cirkelbundel 300
– cirkels 202
concurrent zijn 293
– van merkwaardige rechten 163
– van rechten 161
congruent 18, 47, 108 e.v.
–, rechtstreeks – 116
–, tegengesteld – 116
convexe vierhoek 57
cosinusregel 151

De Ceva, stelling van –160, 294
definitie 11
derde evenredige 264
Desargues, stelling van – 123
diagonaal
–, definitie 57
– van een n-hoek, definitie 229
diagonaalpunt 292
draaiing 110
–, definitie 111
draaivermenigvuldiging 123
driehoek
–, bissectrice van een –, definitie 38, 162
–, buitenbissectrice van een –, definitie 38, 162
–, buitenhoek van een –, definitie 38
–, definitie 34
–, hoogtelijn in een – 54
–, hoogtelijn in een –, definitie 37, 161
–, middelloodlijn in een – 162
–, rechthoekige – 34, 56
–, regelmatige – 232, 274
–, zwaartelijn in een – 54, 55
–, zwaartelijn in een –, definitie 36, 161
driehoeken
–, gelijkvormige – 133
–, homothetische – 133
–, Pythagorische – 151
dualiteit 292
dubbelkoorde 202
dubbelverhouding
–, definitie 280
–, harmonische – 283
– van een vierstraal 283

één-éénduidige
– correspondentie 90
– transformatie 106
Euclidische meetkunde 11
evenredige
–, derde – 264
–, middel– 265
–, vierde – 263
evenredigheid 83
evenwijdige rechten 28
–, definitie 15

Feuerbach, cirkel van – 179

gelijkbenig
– rechthoekige driehoek, definitie 36
– trapezium, definitie 57
gelijkbenige driehoek, definitie 34
gelijkvormige driehoeken 133
gelijkvormigheidspunt
–, inwendig – 206, 270
–, uitwendig – 206, 270
gelijkzijdige driehoek, definitie 36
gemeenschappelijke
– koorde 202
– raaklijn, inwendig – 206
– raaklijn, uitwendig – 206
gemiddelde, definitie 84
gestrekte hoek 19

graad 21
grenspunt, definitie 180
grenspunten van een bundel 299
grondbegrip 10
grondcirkel van de inversie 245
grondrelatie 11

halve
- rechte 17
- rechte, definitie 14
- vlakken 16
harmonisch puntenviertal 284
harmonische
- dubbelverhouding 283
- vierstraal 284 e.v.
hoek 19 e.v., 27
-, aanliggende - 47
-, binnengebied van een - 18
-, bissectrice van een - 54
-, bissectrice van een -, definitie 38
-, buitengebied van een - 18
-, definitie 17
- van twee cirkels, definitie 227
hoeken, supplementaire - 249
hoekgraad 21
hoekminuut 21
hoekpunt 17
hoekseconde 21
hoge klasse meetbare getallen 79
homothetie 123
-, definitie 126
homothetische
- driehoeken 133
- punten 123
hoofdeigenschap van de evenredigheden 83
hoogtelijn
- in een driehoek 54
- in een driehoek, definitie 37, 161
hoogtepunt 167, 259

identieke afbeelding 107
ingeschreven cirkel 167, 207, 256
ingesloten hoek 47
involutorische transformatie 246 e.v.
inwendig
- gelijkvormigheidspunt 206, 270
- gemeenschappelijke raaklijn 206, 271
- punt, definitie 180
inwendige
- raking 200
- verdeling 90
inverse
- figuur 277 e.v.
- punt 276
inversie 17, 106, 305 e.v.
-, grondcirkel van de - 245
inverteren van een punt, definitie 245

koorde
-, gemeenschappelijke - 202
- in een cirkel, definitie 91
koorden-n-hoek 231
koordenveelhoek 240
-, definitie 230
koordenvierhoek, definitie 212

lage klasse meetbare getallen 79
lijnstuk, definitie 14
lijnstukken, verhouding van twee -, definitie 80
loodrechte stand 25

maatgetal 19, 23, 180
macht
- t.o.v. een cirkel, definitie 223
- van een punt, definitie 219
machtlijn
- t.o.v. een cirkel, definitie 222
- van cirkels 274
machtpunt t.o.v. een cirkel, definitie 223
meetbaar getal 80
meetbare getallen
-, hoge klasse - 79
-, lage klasse - 79

meetbare verhouding 82
meetkundige plaats, definitie 134
Menelaos
–, omgekeerde stelling van – 158
–, stelling van – 155, 294
merkwaardige rechten, concurrent zijn van – 163
middelevenredig 265
–, definitie 84
middelloodlijn
– in een driehoek, definitie 162
– van een lijnstuk, definitie 39
middellijn van een cirkel, definitie 91
middelpuntsdriehoek, definitie 232
middelpuntsdriehoek in een cirkel 97
–, definitie 91
middelste reden 238, 269
middenparallel 74, 76
minuut 21

n-hoek
–, definitie 229
–, diagonaal van een –, definitie 229
–, koorden – 231
–, omgeschreven cirkel van een – 232 e.v.
–, raaklijnen – 232
–, regelmatige –, definitie 231
natuurlijk getal 79, 80
negenpuntscirkel 179, 260
nevenhoek 19, 24
niet-Euclidische meetkunde 11

omgekeerd evenredig, definitie 84
omgekeerde hoofdeigenschap van de evenredigheden 83
omgekeerde van de stelling
– van Menelaos 158
– van Pythagoras 150
omgeschreven cirkel 167, 207, 232 e.v., 256
omtrek van een cirkel, definitie 242 e.v.
omtrekshoek in een cirkel 98
–, definitie 92
onderling afhankelijke axioma's 12
oneindig verre
– punt 124
– rechte 124
ongelijkheidsschema 22
onmeetbaar getal 80 e.v.
onmeetbare verhouding 82, 182
oppervlakte
– van een cirkel, definitie 244
– van een vlakstuk 181
ordeningsaxioma 12 e.v.
orthocentrische driehoek 176
orthogonale cirkelbundel 299
overeenkomstige hoeken 27 e.v.
overstaande hoeken 19, 24, 47

parallellogram, definitie 59
Poncelet, punten van – 299
pool 289
poollijn, definitie 286, 287
produktfiguur 119
projectie 36
–, centrale –, definitie 124
–, definitie 145
projectieformule 153
projectiestelling 151, 153
Ptolemaeus, stelling van – 215
punt
–, inverteren van een –, definitie 245
–, macht van een –, definitie 219
–, oneindig verre – 124
punten
–, collineair zijn van – 161, 293
–, homothetische – 123
– van Poncelet 299
–, verzameling van – 144
puntenviertal, harmonisch – 284
Pythagoras
–, omgekeerde stelling van – 150
–, stelling van – 146

Pythagorische driehoeken 151

raaklijn 270
– aan een cirkel, definitie 91
–, inwendig gemeenschappelijke – 206, 271
–, uitwendig gemeenschappelijke – 206, 271
raaklijnen-n-hoek 232
raaklijnenveelhoek, definitie 231
raaklijnenvierhoek 212
raakprobleem van Apollonius 303
raking
–, inwendige – 200
–, uitwendige – 198
recht evenredig, definitie 84
rechte
–, halve 17
–, halve –, definitie 14
– hoek 20
–, oneindig verre – 124
rechten
–, concurrent zijn van – 161
–, concurrent zijn van merkwaardige – 163
–, evenwijdige – 28
–, evenwijdige –, definitie 15
–, snijdende –, definitie 15
rechthoek, definitie 59
rechthoekig trapezium, definitie 57
rechthoekige driehoek 56
–, definitie 34
–, gelijkbenig –, definitie 36
rechtstreeks congruent 116
regelmatige
– achthoek 234, 275
– driehoek 232, 274
– n-hoek, definitie 231
– 2n-hoek 234
– tienhoek 235, 276
– twaalfhoek 235, 274
– vierhoek 233, 275
– vijfhoek 237, 276
– zeshoek 232, 274
rotatie 110
– definitie 111
ruit, definitie 59

scherpe hoek 20
scherphoekige driehoek, definitie 34
scheve affiniteit, definitie 125
seconde 21
snijdende rechten, definitie 15
snijlijn van een cirkel, definitie 91
spiegeling 110, 114
–, as van – 114
stelling van
– De Ceva 160, 294
– Desargues 123
– Menelaos 155, 294
– Menelaos, omgekeerde – 158
– Ptolemaeus 215
– Pythagoras 146
– Pythagoras, omgekeerde – 150
– Stewart 154
Stewart, stelling van – 154
stompe hoek 20
stomphoekige driehoek, definitie 34
straal van een cirkel, definitie 91
stralenbundel, definitie 280
supplement 20, 24, 25
supplementaire hoeken 249
symmetrie-as 115
symmetrische ligging 115

tegengesteld congruent 116
tienhoek, regelmatige – 235, 276
transformatie
–, involutorische – 245 e.v.
–, vermenigvuldigings– 106
translatie 110
–, definitie 111, 127
trapezium
–, definitie 57
–, gelijkbenig – 57
–, rechthoekig –, definitie 57
twaalfhoek, regelmatige – 235, 274

uiterste reden 238,269
uitwendig
– gelijkvormigheidspunt 206, 270
– gemeenschappelijke raaklijn 206,271
uitwendige
– raking 198
– verdeling 90

vector 114
veelhoek, definitie 59
verbindingsaxioma 12 e.v.
verdeling,
–, inwendige – 90
–, uitwendige – 90
verdubbelingsformule 235
verhouding
–, meetbare 82
–, onmeetbare – 182
– van twee lijnstukken, definitie 80
verlengde 14
vermenigvuldigen van figuren, definitie 119
vermenigvuldiging, draai– 123
vermenigvuldigingstransformatie 106
verplaatsing 17
verplaatsingsaxioma 12 e.v., 106 e.v.
verschuiving 110
–, definitie 111
verwisselende
– binnenhoeken 27 e.v.
– buitenhoeken 28 e.v.
verzameling
–, begrensde – 238 e.v.
–, grens van een – 238 e.v.
– van punten 144
vierde evenredige 263
vierhoek
–, convexe 57
–, definitie 57
–, regelmatige – 233,275
–, volledige –, definitie 292
vierkant, definitie 59
vierstraal 279
–, dubbelverhouding van een – 283
–, harmonische – 284
vierzijde, volledige –, definitie 292
vlakken, halve – 16
vlakstuk
–, definitie 180
–, oppervlak van een – 181
vlakstukeenheid 181
vlieger 59
voetpuntsdriehoek 176
volledige
– vierhoek, definitie 292
– vierzijde, definitie 292
vijfhoek, regelmatige – 236,276

Waerden, van der – 12,13

zeshoek, regelmatige – 232,274
zwaartelijn in een driehoek 54, 55
–, definitie 36,161
zwaartepunt 167,259

6710.1

PRISMA-COMPENDIA

het pocketboek voor studie en praktijk

C 1 *Algemene muziekleer* T. Willemze
Een grondslag van de gehele muziekstudie, waarin zowel de elementaire zaken als de theoretische kennis volledig worden behandeld.

C 2 *Sterrenkunde* Dr. W. J. A. Schouten
Een overzicht van het ontstaan van de astronomie en de boeiende kwesties omtrent de bouw en de ontwikkeling van de kosmos.

C 3 *Algemene rekenkunde* D. W. Oort en G. H. Meijer
De auteurs behandelen de rekenkundige begrippen zodanig dat men een dieper inzicht in de materie krijgt.

C 4 *Algemene geschiedenis der middeleeuwen*
Dr. H. P. H. Jansen
Een exacte en boeiende karakteristiek van het tijdperk tussen de klassieke oudheid en de nieuwe tijd.

C 5 *Goniometrie en trigonometrie* C. van der Linden
De gehele middelbare-schoolstof samengevat, en een behandeling van verschillende onderwerpen die aanmerkelijk verder gaan.

C 6 *Economie* G. L. S. Shackle
Termen en begrippen der economische wetenschap worden hier systematisch en helder, ook voor de leek, behandeld.

C 7 *Analytische meetkunde* C. van der Linden
Het eerste gedeelte geeft een volledig overzicht van de leerstof op de middelbare school; het tweede behandelt onderwerpen die dieper op de stof ingaan.

C 8 *Geschiedenis van de klassieke letterkunde*
Dr. G. J. M. Bartelink
Een samenvatting van de ontwikkeling en de invloeden van de klassieke Griekse en Latijnse literatuur.

C 9 *Biochemie* Kenneth Harrison
Een uitstekend overzicht van de hedendaagse biochemie, met vermelding van de nieuwe enzym-nomenclatuur.

C 11 *Algemene psychologie* John F. Hahn
Een volledig overzicht van de begrippen en grondbegrippen der psychologie.

Wenst u regelmatig te worden ingelicht over alle nieuwe uitgaven, geef dan naam en adres op aan:
Prisma-boeken, Postbus 2073, Utrecht of
Prisma-boeken, Schildersstraat 2, Antwerpen

PRISMA-COMPENDIA

het pocketboek voor studie en praktijk

J. H. van den Hoeven werd in 1923 te Amersfoort geboren. Na in 1941 de onderwijzersbevoegdheid verkregen te hebben aan de Jan van Nassaukweekschool te Utrecht, volgde hij een loopbaan aan verschillende scholen voor L.O. en U.L.O. in Amersfoort, Stroe en Amsterdam. In 1956 behaalde hij de akten Wiskunde M.O. K^{I} en K^{V}, waarna hij leraar wiskunde werd aan het Hervormd lyceum te Amsterdam.

3900066